Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Лысьвенский филиал федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»

УТВЕРЖДАЮ
Зав.кафедрой ТД
_____Т.О. Сошина
«_27_»_____02_____ 2026 г

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по учебной дисциплине

Приложение к рабочей программе учебной дисциплины

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРИКЛАДНЫХ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

основной профессиональной образовательной программы
подготовки специалистов среднего звена
по специальности СПО 38.02.08 Торговое дело

(базовая подготовка)

Лысьва, 2026

Оценочные материалы разработаны на основе:

- Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования, утверждённого приказом Министерства просвещения Российской Федерации «19» июня 2023 г. № 548 по специальности *38.02.08 Торговое дело*

- рабочей программы учебной дисциплины «Математические методы решения прикладных профессиональных задач», утвержденной «27» 02 20__ г.;

Разработчик: преподаватель Е.Л. Федосеева

Оценочные материалы рассмотрены и одобрены на заседании предметной (цикловой) комиссии ***Естественнонаучных дисциплин (ПЦК ЕНД)*** «10» 02 2026 г., протокол № ____

Председатель ПЦК ЕНД М.Н. Апталаев

Паспорт оценочных материалов

В результате освоения учебной дисциплины **математические методы решения прикладных профессиональных задач** обучающийся должен обладать предусмотренными ФГОС по специальности СПО *38.02.08 Торговое дело* базовой подготовки следующими результатами обучения: знаниями, умениями, которые формируют общие компетенции.

Код ОК, ПК, ЛР	Умения	Знания
ОК 01. ОК 02. ПК 2.6.	– распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте; анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части; выявлять и эффективно искать информацию, необходимую для решения задачи и/или проблемы; составлять план действия; оценивать результат и последствия своих действий (самостоятельно или с помощью наставника) – определять задачи для поиска информации; определять необходимые источники информации; планировать процесс поиска; структурировать получаемую информацию; выделять наиболее значимое в перечне информации; оценивать практическую значимость результатов поиска; оформлять результаты поиска, использовать современное программное	– актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить; основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте; – алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях; структуру плана для решения задач; порядок оценки результатов решения задач профессиональной деятельности – номенклатура информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности; приемы структурирования информации; формат оформления результатов поиска информации, современные средства и устройства информатизации; порядок их применения и программное обеспечение в профессиональной деятельности в том

	обеспечение; использовать различные цифровые средства для решения профессиональных задач. – анализировать предпринимательскую деятельность с применением программных продуктов.	числе с использованием цифровых средств. – принципов и методов управления информационными данными с использованием информационных интеллектуальных технологий.

Перечень общих компетенций элементы, которых формируются в рамках учебной дисциплины:

Код ОК	Наименование ОК
ОК 01.	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам
ОК 02.	Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности

Перечень профессиональных компетенций элементы, которых формируются в рамках учебной дисциплины:

Код ПК	Наименование ПК
ПК 2.6	Рассчитывать показатели эффективности предпринимательской деятельности, в том числе с применением программных продуктов

1 МЕТОДЫ И ФОРМЫ КОНТРОЛЯ ОЦЕНИВАНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

1 Для текущего и рубежного контроля освоения дисциплинарных компетенций используются следующие методы:

-Устный опрос

- Тестирование

- Наблюдение и оценка результатов лабораторных занятий

- Экспертная оценка результатов самостоятельной работы

- Экспертная оценка домашней контрольной работы

- Экспертная оценка по результатам наблюдения за деятельностью обучающегося в процессе освоения учебной дисциплины

2 Формой промежуточной аттестации по учебной дисциплине является **экзамен,** который проводится в сроки, установленные учебным планом и определяемые календарным учебным графиком образовательного процесса.

Таблица 1 – Методы и формы контроля и оценивания элементов учебной дисциплины

Элемент учебной дисциплины	Методы и формы контроля и оценивания		
	Текущий контроль	Рубежный контроль	Промежуточная аттестация
Раздел 1 Основы математического анализа **Тема 1.1 Функции** **Тема 1.2. Пределы и непрерывность**	Устный опрос Наблюдение и оценка результатов практических занятий Экспертная оценка результатов самостоятельной работы Экспертная оценка по результатам наблюдения за деятельностью обучающегося в процессе освоения учебной дисциплины	Тестирование Экспертная оценка домашней контрольной работы	
Раздел 2 Дифференциальное и интегральное исчисление **Тема 2.1 Производная функции** **Тема 2.2 Приложение производной** **Тема 2.3 Неопределенный интеграл** **Тема 2.4 Определённый интеграл**	Устный опрос Наблюдение и оценка результатов практических занятий Экспертная оценка результатов самостоятельной работы Экспертная оценка по результатам наблюдения за деятельностью обучающегося в процессе освоения учебной дисциплины	Тестирование Экспертная оценка домашней контрольной работы	
Раздел 3 Линейная	Устный опрос	Тестирование	

алгебра **Тема 3.1 Матрицы и определители** **Тема 3.2 Системы линейных уравнений**	Наблюдение и оценка результатов праткических занятий Экспертная оценка результатов самостоятельной работы	Экспертная оценка домашней контрольной работы	
Раздел 4 Комплексные числа **Тема 4.1 Комплексные числа**	Устный опрос Наблюдение и оценка результатов праткических занятий Экспертная оценка результатов самостоятельной работы		
Раздел 5 Основы теории вероятностей и математической статистики **Тема 5.1 Основные понятия математической статистики**	Устный опрос Наблюдение и оценка результатов праткических занятий Экспертная оценка результатов самостоятельной работы		
Раздел 6 Основы дискретной математики **Тема 6.1 Множества и операции над ними**	Устный опрос Наблюдение и оценка результатов праткических занятий Экспертная оценка результатов самостоятельной работы		
Форма контроля			**Экзамен**

Текущий контроль

Текущий контроль усвоения материала проводится в форме устного опроса обучающихся по темам учебной дисциплины.

Наблюдение и оценка результатов практических занятий

Типовые темы занятий приведены в РПД. Комплект заданий на практического занятия приведены в МУ по ПЗ по учебной дисциплине.

Защита отчетов по практическим занятиям проводится индивидуально каждым обучающимся в форме собеседования.

Экспертная оценка результатов самостоятельной работы

Задания для самостоятельной работы приведены в МУ по СРС по учебной дисциплине.

Качественная оценка определения научного кругозора, степенью овладения методами теоретического исследования и развития самостоятельности мышления обучающегося.

Способом проверки качества организации самостоятельной работы обучающихся является контроль:

— корректирующий (может осуществляться во время индивидуальных консультаций по поводу выполнения формы самостоятельной работы);

— констатирующий (по результатам выполнения специальных форм самостоятельной работы);

— самоконтроль (осуществляется самим обучающимся);

— текущий (в ходе выполнения различных форм самостоятельной работы, установленных рабочей программой);

— промежуточный (оценка результата обучения как итога выполнения обучающимся всех форм самостоятельной работы).

Экспертная оценка домашней контрольной работы

Темы контрольных работ и требования к их выполнению приведены в МУ по СРС по учебной дисциплине.

Выполненная контрольная работа сдается в деканат в установленные сроки. Результаты домашней контрольной работы учитываются при промежуточной аттестации. При необходимости возможно собеседование с преподавателем по теме контрольной работы.

Экспертная оценка по результатам наблюдения за деятельностью обучающегося в процессе освоения учебной дисциплины

Осуществляется как наблюдение за процессом деятельности обучающегося в режиме реального времени. Является качественной оценкой освоения учебной дисциплины, учитываемой при промежуточной аттестации.

Рубежный контроль

Рубежный контроль для комплексного оценивания усвоенных знаний, освоенных умений проводится в форме тестирования после изучения тем учебной дисциплины, выполнения домашней контрольной работы.

2 РЕЗУЛЬТАТЫ ОСВОЕНИЯ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ, ПОДЛЕЖАЩИЕ ПРОВЕРКЕ НА ЭКЗАМЕНЕ

В результате промежуточной аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих умений и знаний:

Результаты обучения (освоенные умения, усвоенные знания)	Показатели оценки результатов
Перечень знаний, осваиваемых в рамках дисциплины:	
– значение математики в профессиональной деятельности и при освоении ППССЗ; – основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности; – основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, линейной алгебры, теории комплексных чисел, теории вероятности и математической статистики; основы интегрального и дифференциального исчисления	Аргументированно объясняет роль математического аппарата в решении задач, связанных с будущей профессией. — Демонстрирует понимание межпредметных связей математики со специальными дисциплинами профессионального цикла. — Приводит примеры профессиональных задач, которые невозможно решить без применения математических методов. — Воспроизводит алгоритмы применения конкретных математических методов (аналитических, численных, графических) для типовых профессиональных задач. — Обосновывает выбор того или иного метода в зависимости от условия прикладной задачи. — Классифицирует прикладные задачи по разделам математики, к которым они относятся. — Дает четкие определения основным понятиям (предел, производная, матрица, граф, комплексное число, вероятность, выборка и т.д.). — Формулирует содержание ключевых теорем и правил (правила дифференцирования, методы вычисления вероятностей, действия с матрицами). — Владеет понятийно-терминологическим аппаратом, необходимым для чтения профессиональной литературы. Формулирует физический и геометрический смысл производной и интеграла применительно к профессиональным процессам (например: скорость протекания процесса, площадь, объем, работа переменной силы). — Воспроизводит таблицу производных и основных интегралов. — Объясняет разницу между дифференциальным и интегральным подходами к исследованию процессов
Перечень умений, осваиваемых в рамках дисциплины	
решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности	— Анализирует условие прикладной задачи и выделяет математическую сущность проблемы (формализует задачу). — Переводит условие задачи с профессионального языка на

	математический язык (составляет уравнения, неравенства, системы, функции распределения). — Выявляет необходимый математический метод (анализ, алгебра, теория вероятностей) для решения конкретной профессиональной ситуации. — Выполняет математические расчеты: Составляет и вычисляет производные для нахождения оптимума (максимума/минимума) параметров процесса. Вычисляет определенные интегралы для нахождения суммарного эффекта процесса. Выполняет действия с матрицами и комплексными числами. Решает комбинаторные задачи и вычисляет вероятности событий.. — Интерпретирует полученный математический результат обратно на язык профессиональной задачи (дает содержательный вывод). — Оценивает правдоподобие и практическую значимость полученного решения.

3 КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ

Критерии устного ответа

Критерии оценки	Оценка
обучающийся полно излагает материал (отвечает на вопрос), дает правильное определение основных понятий; обнаруживает понимание материала, может обосновать свои суждения, применить знания на практике, привести необходимые примеры не только из учебника, но и самостоятельно составленные; излагает материал последовательно и правильно с точки зрения норм литературного языка	**Отлично**
обучающийся дает ответ, удовлетворяющий тем же требованиям, что и для оценки «отлично», но допускает 1–2 ошибки, которые сам же исправляет, и 1–2 недочета в последовательности и языковом оформлении излагаемого	**Хорошо**
обучающийся обнаруживает знание и понимание основных положений данной темы, но излагает материал неполно и допускает неточности в определении понятий или формулировке правил; не	**Удовлетворительно**

умеет достаточно глубоко и доказательно обосновать свои суждения и привести свои примеры; излагает материал непоследовательно и допускает ошибки в языковом оформлении излагаемого	

Критерии оценки практических занятий

1 активность работы на практическом занятии (выполнение всех заданий, предложенных преподавателем);

2 правильность ответов на вопросы (верное, четкое и достаточно глубокое изложение понятий, идей, и т.д.);

3 полнота и одновременно лаконичность ответа (ответ должен отражать основные теории и концепции по раскрываемому вопросу, содержать их критический анализ и сопоставление);

4 умение формулировать собственную точку зрения, грамотно аргументировать свою позицию по раскрываемому вопросу;

5 культура речи (материал должен быть изложен хорошим профессиональным языком, с грамотным использованием соответствующей системы понятий и терминов)

Критерии оценки практического задания

Критерии оценки	Оценка
–работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения опытов и измерений; все опыты проведены в условиях и режимах, обеспечивающих получение правильных результатов и выводов; соблюдены требования правил безопасности труда; в отчете правильно и аккуратно выполнены все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики, вычисления; правильно выполнен анализ погрешностей	**Отлично**
–работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности проведения опытов и измерений; все опыты проведены в условиях и режимах, обеспечивающих получение правильных результатов и выводов; соблюдены требования правил безопасности труда; в отчете правильно и аккуратно выполнены все записи, таблицы, рисунки, чертежи, графики, вычисления;	**Хорошо**

правильно выполнен анализ погрешностей Допущено два - три недочета или не более одной негрубой ошибки и одного недочёта	
–работа выполнена не полностью, но объем выполненной части позволяет получить правильные результаты и выводы, если в ходе проведения опыта и измерений были допущены ошибки.	**Удовлетворительно**
Работа выполнена не полностью и объем выполненной части работы не позволяет сделать правильных выводов, если опыты, измерения, вычисления, наблюдения производились неправильно	**Неудовлетворительно**

Критерии оценки контрольной работы

Критерии оценки	Оценка
Контрольная работа выполнена без ошибок и недочетов или допущено не более одного недочета	**Отлично**
Контрольная работа выполнена полностью, но допущено не более одной негрубой ошибки и одного недочета, или не более двух недочетов	**Хорошо**
Контрольная работа выполнена правильно не менее половины работы или допущено не более двух грубых ошибок, или не более одной грубой и одной негрубой ошибки и одного недочета, или не более двух-трех негрубых ошибок, или одной негрубой ошибки и трех недочетов, или при отсутствии ошибок, но при наличии четырех-пяти недочетов, плохое знание текста произведения, допущено искажение фактов	**Удовлетворительно**
допущено число ошибок и недочетов превосходящее норму, при которой может быть выставлена оценка «3», или если правильно выполнено менее половины работы	**Неудовлетворительно**

Критерии оценивания тестов

Отлично	Хорошо	Удовлетворительно	Неудовлетворительно
100-86	85-70	69 - 51	50 и менее

Критерии результатов самостоятельной работы

При экспертной оценке результатов самостоятельной работы учитываются такие критерии:

- Глубина освоения знаний
- Источники информации
- Качество выполнения работы
- Самостоятельность изложения
- Творчество и личный вклад
- Соблюдение правил оформления

Экспертная оценка по результатам наблюдения за деятельностью обучающегося в процессе освоения учебной дисциплины

Интегральная качественная оценка освоения учебной дисциплины, учитываемая при промежуточной аттестации.

Критерии оценки промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация проводится в форме **экзамена**.

Экзамен проводится по завершению курса изучения учебной дисциплины по билетам, содержащим два теоретических вопроса и практическое задание.

К сдаче экзамена допускаются обучающиеся, выполнившие все отчетные работы и получившие по результатам текущей аттестации оценки не ниже «удовлетворительно».

Основой для определения оценки на экзамене служит объём и уровень усвоения обучающимися материала, предусмотренного рабочей программой учебной дисциплины «Правовое обеспечение профессиональной деятельности».

Критерии оценивания экзамена

Критерии оценки	Оценка
Всестороннее, систематическое и глубокое знание учебного программного материала, самостоятельно выполненные все предусмотренные программой задания, глубоко усвоенные основная и дополнительная литература, рекомендованная программой, активная работа на практических (лабораторных) занятиях. Обучающийся разбирается в основных научных концепциях по изучаемой учебной	**Отлично**

дисциплине, проявивший творческие способности и научный подход в понимании и изложении учебного программного материала. Ответ отличается богатством и точностью использованных терминов, материал излагается последовательно и логично	
Достаточно полное знание учебно-программного материала. Обучающийся не допускает в ответе существенных неточностей, самостоятельно выполнивший все предусмотренные программой задания, усвоивший основную литературу, рекомендованную программой, активно работавший на практических (лабораторных) занятиях, показавший систематический характер знаний по учебной дисциплине, достаточный для дальнейшей учебы, а также способность к их самостоятельному пополнению	**Хорошо**
Обучающийся показал знание основного учебно-программного материала в объёме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по специальности, не отличавшийся активностью на практических (лабораторных) занятиях, самостоятельно выполнивший основные предусмотренные программой задания, однако допустивший погрешности при их выполнении и в ответе на экзамене, но обладающий необходимыми знаниями для устранения под руководством преподавателя наиболее существенных погрешностей	**Удовлетворительно**
обучающийся обнаруживает пробелы в знаниях или отсутствие знаний по значительной части основного учебно - программного материала, не выполнивший самостоятельно предусмотренные программой основные задания, допустивший принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий, не отработавший основные практические (лабораторные) занятия, допускающий существенные ошибки при ответе, и который не может продолжить обучение или приступить к профессиональной деятельности без дополнительных занятий по соответствующей учебной дисциплине	**Неудовлетворительно**

4 ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ТЕКУЩЕГО И РУБЕЖНОГО КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЯ

Задания для оценки освоения Раздел 1 Основы математического анализа

Тема 1.1 Функции

Темы 1.2 Пределы и непрерывность

Обучающийся должен:

Знать: определение функции, области определения и области значения; классификацию функций; определение предела функции в точке и на бесконечности; свойства пределов; замечательные пределы; определение непрерывности функции и классификацию точек разрыва; понятие асимптот.

Уметь: находить область определения функции; исследовать функцию на четность; находить пределы функций, раскрывая неопределенности различных видов; исследовать функцию на непрерывность и классифицировать точки разрыва; находить асимптоты графика функции.

Вопросы для устных опросов

1.Что значит «задать функцию»? Укажите три объекта.

2. Что такое независимая и зависимая переменные?

3. Какие вы знаете способы задания функции одной переменной?

4. Приведите пример функции одной переменной.

5. Что такое предел функции? На каком языке наиболее часто формулируют определение предела функции?

7. В чем состоит первое свойство предела функции?

8. Назовите второе свойство предела функции.

9. В чем состоит третье свойство предела функции?

10. Назовите четвертое и пятое свойство предела функции

Типовой тест по Разделу 1

Вариант 1

1. Найти пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{3-\sqrt{x+6}}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}\right)^{3x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 20x}$.

2. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{\ln(x-15)}.$$

3. Найдите производную функции $y=e^{x^2-\frac{3}{4}}\cdot\arccos x$

в точке $x_0=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\sin^2 4x$

в точке $x_0=\dfrac{\pi}{16}$.

5. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции

$$y=\frac{x^4}{6}-3x^2.$$

6. Вычислите интеграл

$$\int_0^1\left(2x^3-1\right)^4\cdot x^2dx.$$

7. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс

криволинейной трапеции, ограниченной линиями: y=0, y=3, y=5 и

$y=\sqrt{x-2}$.

Вариант 2

1. Найти пределы функций

а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{4-\sqrt{x+12}}$, б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{4x}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 18x}$.

2. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x\to 25}\frac{\sqrt{x}-5}{\ln(x-24)}.$$

3. Найдите производную функции $y = e^{x^2-\frac{1}{2}}\cdot \arcsin x$

в точке $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \cos^2 6x$

в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{24}$.

5. Найдите точки перегиба и промежутки выпуклости графика функции

$$y = \frac{x^4}{3} - 6x^2.$$

6. Вычислите интеграл

$$\int_0^1 \left(3x^4+1\right)^2\cdot x^3 dx.$$

7. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс

криволинейной трапеции, ограниченной линиями: y=0, x=4, x=6 и

$y = \sqrt{x-3}$.

Задания для оценки освоения Разделу 2. Дифференциальное и интегральное исчисление

Тема 2.1 Производная функции

Тема 2.2 Приложение производной

Тема 2.3 Неопределенный интеграл

Тема 2.4 Определённый интеграл

Обучающийся должен

Знать: определение производной, таблицу производных, правила дифференцирования; геометрический и физический смысл производной; достаточные признаки монотонности и экстремумов; определение первообразной и неопределенного интеграла, таблицу интегралов, методы интегрирования (непосредственное, замена переменной);

Уметь: находить производные элементарных функций и их комбинаций; составлять уравнение касательной к графику функции; исследовать функцию с помощью производной и строить её график; вычислять неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования и замены переменной; вычислять определенные интегралы и находить площадь криволинейной трапеции.

Вопросы для устного опроса:

1.Что такое производная функции?

2. Какова геометрическая интерпретация производной?

3. Дайте определение предела функции.

4. Объясните понятие непрерывности функции.

5. Что такое определенный интеграл?

6. Каково геометрическое толкование определенного интеграла?

Типовой тест по разделу 2

Вариант 1

1. Вычислить определенный интеграл: $\int_0^2 (4x^2 + x - 3)dx$.
2. Вычислить определенный интеграл методом подстановки: $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$.
3. Вычислить, предварительно сделав рисунок, площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$.
4. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями: $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.
5. Скорость движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 + 2t + 1$ (м/с). Найти путь S, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

Вариант 2

Найти неопределенные интегралы методом непосредственного интегрирования (для № 1-5).

1. $\int \left(6\sin x + 4x^3 - \frac{1}{x}\right)dx$.
2. $\int \frac{x^9 - 3x^7 + 2x^6}{x^7}dx$.
3. $\int (7^x \cdot 2^{2x} + 5)dx$.
4. $\int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Найти неопределенные интегралы методом подстановки (для № 6-8).

6. $\int (7x+5)^4 dx$.
7. $\int \frac{18x^2 - 3}{6x^3 - 3x + 8}dx$.
8. $\int x^7 \cdot e^{x^8} dx$.
9. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям: $\int (x-2)\sin x dx$.

Вариант 3

1. Найдите производную функции $(f)(x) = x^3 + 2x$.
2. Найдите производную функции $(f)(x) = sinx + 2cosx$.
3. Найдите производную функции $(f)(x) = x^3 * 2cosx$.
4. Найдите производную функции $(f)(x) = 3x^6/5cosx$.

Задания для оценки освоения Раздела 3 Линейная алгебра

Тема 3.1 Матрицы и определители

Тема 3.2 Системы линейных уравнений

Обучающийся должен

Знать: определение матрицы, виды матриц; действия над матрицами (сложение, умножение на число, умножение матриц); понятие определителя 2-го и 3-го порядка и методы его вычисления (правило треугольников, Саррюса); понятие обратной матрицы; методы решения систем линейных уравнений (Крамера, Гаусса).

Уметь: выполнять действия над матрицами; вычислять определители; решать системы линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса; исследовать системы на совместность.

Вопросы для устного опроса:

1. Что такое матрица?

2. Где в математике используют матрицы?

3. Какая матрица называется квадратной?

4. Что такое транспонированная матрица?

5. Что такое система линейных алгебраических уравнений?

6. Какие способы классификации систем существуют?

7. Дайте определение совместимой системы уравнений.

8. Чем отличается определённая система от неопределённой?

9. Назовите основные методы решения систем линейных уравнений.

Типовой тест по разделу 3

1. Найти произведение матриц ABC, если

$$A=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 2 & -3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}5 & 6\\ 3 & 4\end{pmatrix} * X=\begin{pmatrix}83\\ 53\end{pmatrix}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases}3x-8y+z=7,\\ -5x+4y+2z=-10,\\ 2x+7y-3z=6.\end{cases}$$

4. Составить уравнения двух прямых, проходящих через точку A(4; 1), параллельно и перпендикулярно прямой 3x – 4y + 2 = 0

5. Построить область решений системы неравенств

$$\begin{cases}x+y\ge -2,\\ x+4y\le 16,\\ -x+y\ge -6.\end{cases}$$

Определить координаты угловых точек области решений.

6. Используя графический метод решения задач линейного программирования найти наибольшее значение линейной целевой функции F (x; y) = 2x + 4y в области, заданной ограничениями:

$$\begin{cases}-x+2y\le 8,\\ x+y\le 10,\\ x\le 8;\end{cases}$$
$$x\ge 0;\ y\ge 0.$$

Задания для оценки освоения Раздела 4. Комплексные числа

Тема 4.1. Комплексные числа

Обучающийся должен

Знать: алгебраическую, тригонометрическую и показательную формы записи; понятия модуля и аргумента комплексного числа; правила арифметических действий над комплексными числами в алгебраической форме; формулу Муавра; правила извлечения корня из комплексного числа.

Уметь: выполнять сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел в алгебраической форме; находить сопряженные числа; изображать числа на комплексной плоскости; переводить числа из алгебраической формы в тригонометрическую и обратно; возводить комплексное число в степень и извлекать корни.

Вопросы для устного опроса:

1. Что такое мнимая единица?

2. Какой буквой обозначается мнимая единица?

3. Что называется суммой двух комплексных чисел?

4. Как найти разность двух комплексных чисел?

5. Что называется произведением двух комплексных чисел?

6. Как найти частное двух комплексных чисел?

Типовой тест по разделу 4

Задание 1. Действия над комплексными числами в алгебраической форме (3 балла)

Даны комплексные числа: $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 4 + i$.

Вычислите:

а) $z_1 + z_2$

б) $z_1 - z_2$

в) $z_1 \cdot z_2$

г) $\frac{z_1}{z_2}$

Задание 2. Геометрическое представление и модуль (3 балла)

Дано комплексное число $z = -3 + 4i$.

а) Изобразите число z на комплексной плоскости.

б) Найдите модуль $|z|$.

в) Запишите число, сопряженное данному ($\overline{z}$).

Задание 3. Тригонометрическая форма (4 балла)

Представьте комплексное число $z = -1 + i$ в тригонометрической форме.

Задание 4. Возведение в степень (3 балла)

Вычислите, используя формулу Муавра: $(1 - i)^6$.

Задание 5. (*) Извлечение корня (5 баллов - дополнительно)

Найдите все значения корня $\sqrt[3]{-8}$ и изобразите их на комплексной плоскости.

Задания для оценки освоения Раздела 5 Основы теории вероятностей и математической статистики

Тема 5.1 Основные понятия математической статистики

Обучающийся должен

Знать: генеральную и выборочную совокупности; понятие вариационного ряда; статистическое распределение выборки; выборочную среднюю, моду, медиану, дисперсию, среднее квадратическое отклонение; понятие полигона и гистограммы частот.

Уметь: строить дискретный и интервальный вариационные ряды; вычислять числовые характеристики выборки (среднюю арифметическую, дисперсию, среднее квадратическое отклонение); находить моду и медиану; графически представлять статистические данные (полигон частот, гистограмму).

Вопросы для устного опроса:

1. Что такое вероятность случайного события?

2. Какое событие называется невозможным событием? Приведите пример профессионального контекста.

3. Какие существуют основные методы вычисления вероятности?

4. Чем отличаются абсолютная частота и относительная частота события

5. Объясните понятие статистической устойчивости частоты появления события

Типовой тест по разделу 5

Задание 1.Из 25 экзаменационных билетов по геометрии ученик успел подготовить 11 первых и 8 последних билетов. Какова вероятность того, что на экзамене ему достанется билет, который он не подготовил?

Задание 2. Антон и Игорь бросают белый и черный игральные кубики и подсчитывают сумму выпавших очков. Они договорились, что если при очередном бросании в сумме выпадет 8 очков, то выигрывает Антон, а если в сумме выпадет 7 очков, то выигрывает Игорь. Можно ли считать, что шансы выиграть в этой игре у мальчиков одинаковы?

Задание 3. Для новогодней лотереи отпечатали 1500 билетов, из которых 120 выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?

Задание 4. В коробке лежит 10 шаров, из них 5 черных, 2 белых, остальные – красные. Какова вероятность вытащить черный шар? Вытащить не красный шар? Вытащить красный шар?

Задания для оценки освоения Раздела 6. Основы дискретной математики

Тема 6.1 Множества и операции над ними

Обучающийся должен

Знать: определение множества, способы задания множеств; понятия подмножества, универсального множества, пустого множества; операции над множествами (объединение, пересечение, разность, дополнение, симметрическая разность); свойства операций;.

Уметь: находить мощность объединения множеств; строить декартово произведение; решать практические задачи с использованием теоретико-множественных понятий.

Вопросы для устного опроса:

1. Что называется множеством?

2. Что такое пустое, универсальное множество?

3. Какие операции над множествами вы знаете?

4. Перечислите свойства операций над множествами.

5. Что такое бинарное отношение?

Типовой тест по разделу 6

Вариант №1.

№1. Как называется следующее множество чисел:

N – множество… **N =** {1, 2, 3, 4,…}

№2. Что обозначает запись?

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \Delta B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

№3. Выполните операции A×B, C² над множествами:

$A = \{2,5,6\}$

$B = \{4,5,6\}$

$C = \{2,3\}$

1.N – множество натуральных чисел,

N = {1, 2, 3, 4,…};

Вариант №2.

№1. Как называется следующее множество чисел:

Z – множество … **Z =** {…, – 3, – 2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,…}

№2. Что обозначает запись?

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

№3. Выполните операции A×B, C² над множествами:

$A = \{1,3,7\}$

$B = \{5,2,4\}$

$C = \{1,3\}$

Вариант №3.

№1. Как называется следующее множество чисел:

$$Q = \{\frac{m}{n} \mid m \in Z \wedge n \in N\}$$

Q – множество…

№2. Что обозначает запись?

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$$

№3. Выполните операции A×B, C² над множествами:

$A = \{3,1,6\}$

$B = \{1,3,8\}$

$C = \{1,2\}$

5 ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

Промежуточная аттестация в форме **экзамена**

Экзамен проводится по завершению курса изучения учебного предмета в форме выполнения практического задания с последующим собеседованием с преподавателем с учетом результатов текущего контроля.

Вопросы для подготовки к экзамену

Перечень вопросов для оценки усвоенных знаний

1.Что значит «задать функцию»? Укажите три объекта.

2. Что такое независимая и зависимая переменные?

3. Какие вы знаете способы задания функции одной переменной?

4. Приведите пример функции одной переменной.

5. Что такое предел функции? На каком языке наиболее часто формулируют определение предела функции?

7. В чем состоит первое свойство предела функции?

8. Назовите второе свойство предела функции.

9. В чем состоит третье свойство предела функции?

10. Назовите четвертое и пятое свойство предела функции

11.Что такое производная функции?

12. Какова геометрическая интерпретация производной?

13. Дайте определение предела функции.

14. Объясните понятие непрерывности функции.

15. Что такое определенный интеграл?

16. Каково геометрическое толкование определенного интеграла?

17. Что такое матрица?

18. Где в математике используют матрицы?

19. Какая матрица называется квадратной?

20. Что такое транспонированная матрица?

21. Что такое система линейных алгебраических уравнений?

22. Какие способы классификации систем существуют?

23. Дайте определение совместимой системы уравнений.

24. Чем отличается определённая система от неопределённой?

25. Назовите основные методы решения систем линейных уравнений.

26. Что такое мнимая единица?

27. Какой буквой обозначается мнимая единица?

28. Что называется суммой двух комплексных чисел?

29. Как найти разность двух комплексных чисел?

30. Что называется произведением двух комплексных чисел?

31. Как найти частное двух комплексных чисел?

32. Что такое вероятность случайного события?

33. Какое событие называется невозможным событием? Приведите пример профессионального контекста.

34. Какие существуют основные методы вычисления вероятности?

35. Чем отличаются абсолютная частота и относительная частота события

36. Объясните понятие статистической устойчивости частоты появления события

37. Что называется множеством?

38. Что такое пустое, универсальное множество?

39. Какие операции над множествами вы знаете?

40. Перечислите свойства операций над множествами.

41. Что такое бинарное отношение?

Перечень заданий для оценивания освоенных умений

Варианта №1

1. **Решить дифференциальное уравнение и найти его частное решение**
$dy = (2x^2-5)\,dx$ при x = 1 y = -4

2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 2^n}.$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 4x-2y+z=12, \\ -7x+9y+3z=-6, \\ 3x+4y-2z=9. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

5. Выполнить действия над комплексными числами
$(3 + 5i)$; $(7 - 2i)$.

Вариант №2

1. Решить дифференциальное уравнение и найти его частное решение
$x^2dx + ydy=0$ при x=0 y=1

2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}+\ldots$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 3x-8y+6z=5, \\ -5x+4y+3z=12, \\ 7x+2y-5z=-4. \end{cases}$$

4. Решить систему уравнений методом Гаусса

5. Выполнить действия над комплексными числами
$(6 + 2i)$; $(5 + 3i)$.

Вариант №3

1. Решить дифференциальное уравнение и найти его частное решение

$$\frac{dy}{2x}+\frac{dx}{y}=0$$ при x=0 y=2

2. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\frac{1}{4\cdot 2^4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}+\ldots$$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 4x-2y+z=12, \\ -7x+9y+3z=-6, \\ 3x+4y-2z=9. \end{cases}$$

4. **Решить систему уравнений методом Гаусса**

5.Выполнить действия над комплексными числами
$(-2 + 3i)$; $(7 - 2i)$.

Вариант №4

1. Решить дифференциальное уравнение и найти его частное решение

$\frac{2dy}{dx} = 1 + x^2$ при x=0 y=0

2. Исследовать сходимость ряда

$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \ldots + \frac{n}{n+1}.$

3. Решить систему уравнений по формулам Крамера

$$\begin{cases} 2x - 5y + 6z \models 11, \\ -9x + 2y + 3z = 9, \\ 5x + y - 4z = -8. \end{cases}$$

4. **Решить систему уравнений методом Гаусса**

5.Выполнить действия над комплексными числами

$(5 - 4i)$; $(6 + 2i)$.

Ключ к разделу 1

вопроса	Вариант №1	Вариант №2
1 а)	6	8
1 б)	$\mathbf{e^{12}}$	$\mathbf{e^{12}}$
1 в)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{10}$
3	$\frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 2$	$\frac{\sqrt{2}\pi}{4} - \sqrt{2}$
4	$y = 4x + \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$	$y = -6x + \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$
5	$(-\sqrt{3}$ -7,5) и $(\sqrt{3}$; -7,5) координаты точек перегиба, $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ промежутки выпуклости вниз (- $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$) промежуток выпуклости вверх	$(-\sqrt{3}$ -15) и $(\sqrt{3}$; -15) координаты точек перегиба, $(-\infty; -\sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$ промежутки выпуклости вниз (- $\sqrt{3}$; $\sqrt{3}$) промежуток выпуклости вверх
6	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{4}$
7	4π	4π

Ключ к разделу 2

Вариант 1
1. $\int_0^2 (4x^2 + x - 3)\,dx = \left. \frac{4}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x \right\|_0^2 = \frac{32}{3} + 2 - 6 = \frac{20}{3}$.
2. $\int_{\frac{3}{2}}^{3} (2x-1)^3\,dx$ подстановка $u = 2x - 1$, $du = 2dx$, $dx = \frac{du}{2}$, при $x = \frac{3}{2} \Rightarrow u = 2$, при $x = 3 \Rightarrow u = 5$: $\int_2^5 u^3 \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{u^4}{4} \right\|_2^5 = \frac{1}{8}(5^4 - 2^4) = \frac{1}{8}(625 - 16) = \frac{609}{8}$.
3. Площадь фигуры, ограниченной $y = -x^2 + 4$, $y = 0$, $x = -2$, $x = 2$: $S = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4)\,dx = 2\int_0^2 (-x^2 + 4)\,dx = 2\left. -\frac{x^3}{3} + 4x \right\|_0^2 = 2\left. -\frac{8}{3} + 8 \right. = 2 \cdot \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$.
4. Объём тела вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$: $V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2\,dx = \pi \int_1^4 x\,dx = \pi \cdot \left. \frac{x^2}{2} \right\|_1^4 = \pi \left. \frac{16}{2} - \frac{1}{2} \right. = \pi \cdot \frac{15}{2} = \frac{15\pi}{2}$.
5. Путь, пройденный точкой за 10 с при скорости $v = 3t^2 + 2t + 1$: $S = \int_0^{10} (3t^2 + 2t + 1)\,dt = \left. t^3 + t^2 + t \right\|_0^{10} = 1000 + 100 + 10 = 1110$ м.

Вариант 2

1. $$\left(6\sin x + 4x^3 - \frac{1}{x}\right)\,dx = -6\cos x + x^4 - \ln|x| + C.$$
2. $$\frac{x^9 - 3x^7 + 2x^6}{x^7}dx = \left(x^2 - 3 + \frac{2}{x}\right)\,dx = \frac{x^3}{3} - 3x + 2\ln|x| + C.$$
3. $$\left(7^x \cdot 2^{2x} + 5\right)\,dx = \left(28^x + 5\right)dx = \frac{28^x}{\ln 28} + 5x + C.$$
4. $$\left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\,dx = \operatorname{arctg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$
5. $$\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\arcsin\frac{3x}{2} + C.$$
6. $$(7x+5)^4 dx = \frac{(7x+5)^5}{35} + C.$$
7. $$\frac{18x^2 - 3}{6x^3 - 3x + 8}dx = \ln|6x^3 - 3x + 8| + C.$$
8. $$x^7 e^{x^2}dx = \frac{e^{x^2}}{2}\left(x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 6\right) + C.$$
9. $$(x-2)\sin x\,dx = \sin x - x\cos x + 2\cos x + C.$$

Вариант 3

1. $f(x) = x^3 + 2x$
   $f'(x) = 3x^2 + 2$
2. $f(x) = \sin x + 2\cos x$
   $f'(x) = \cos x - 2\sin x$
3. $f(x) = x^3 \cdot 2\cos x = 2x^3\cos x$
   $f'(x) = 2\cdot(3x^2\cos x + x^3(-\sin x)) = 6x^2\cos x - 2x^3\sin x$
4. $f(x) = \frac{3x^6}{5\cos x}$
   $f'(x) = \frac{(18x^5)(5\cos x) - 3x^6(-5\sin x)}{(5\cos x)^2} = \frac{90x^5\cos x + 15x^6\sin x}{25\cos^2 x} = \frac{15x^5(6\cos x + x\sin x)}{25\cos^2 x} = \frac{3x^5(6\cos x + x\sin x)}{5\cos^2 x}$

Ключ к разделу 3

№ вопроса	Ответ
1	$\begin{pmatrix} 12 & -12 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$
3	**(4;1;3)**
4	Параллельная прямая (3x-4y-8=0) **Перпендикулярная прямая (4x+3y-19=0)**
5	**(-8;6)** **(-2;-4)** **(8;2)**
6	**(4;6)** $\boldsymbol{F_{max} = 32}$

Ключ к разделу 4

Ответ

Задание 1.

а) $z_1 + z_2 = (2+4) + (-3+1)i = 6 - 2i.$

б) $z_1 - z_2 = (2-4) + (-3-1)i = -2 - 4i.$

в) $z_1 \cdot z_2 = (2-3i)(4+i) = 2\cdot 4 + 2\cdot i - 3i\cdot 4 - 3i\cdot i = 8 + 2i - 12i - 3i^2.$

Так как $i^2 = -1$, то $-3i^2 = -3\cdot(-1) = 3.$

$z_1 \cdot z_2 = (8+3) + (2-12)i = 11 - 10i.$

г) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-3i}{4+i}$. Домножим числитель и знаменатель на сопряженное к знаменателю: $(4-i)$.

$= \frac{(2-3i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{2\cdot4+2\cdot(-i)-3i\cdot4-3i\cdot(-i)}{4^2-i^2} = \frac{8-2i-12i+3i^2}{16-(-1)}.$

Так как $i^2 = -1$, то $3i^2 = -3.$

$= \frac{(8-3)+(-2-12)i}{17} = \frac{5-14i}{17} = \frac{5}{17} - \frac{14}{17}i.$

Задание 2.

а) Изображение на плоскости: Точка с координатами $(-3;4)$. (Рисунок: горизонтальная ось Re, вертикальная Im; точка во второй четверти).

б) Модуль: $|z| = \sqrt{(-3)^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$

в) Сопряженное число: $\overline{z} = -3 - 4i.$

Задание 3.

Для числа $z = -1 + i$:

1. $a = -1, b = 1.$
2. Модуль: $r = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$
3. Аргумент: $\cos\varphi = \frac{a}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\varphi = \frac{b}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$
   Точка $(-1;1)$ находится во II четверти. Угол, для которого косинус отрицателен, а синус положителен: $\varphi = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (в градусах 135°).
4. Тригонометрическая форма:
   $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\ \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\ .$

Задание 4.

1. Представим число $z = 1 - i$ в тригонометрической форме.
   $a = 1, b = -1.\ r = \sqrt{1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}.$
   Точка в IV четверти: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4}$ (или $\frac{7\pi}{4}$, но удобнее брать отрицательный угол).
   $1 - i = \sqrt{2}\ \cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\ .$
2. По формуле Муавра: $(1-i)^6 = (\sqrt{2})^6\ \cos(6\cdot(-\frac{\pi}{4})) + i\sin(6\cdot(-\frac{\pi}{4}))\ .$
   $(\sqrt{2})^6 = (2^{1/2})^6 = 2^3 = 8.$
   $\cos(-\frac{6\pi}{4}) + i\sin(-\frac{6\pi}{4}) = \cos(-\frac{3\pi}{2}) + i\sin(-\frac{3\pi}{2}).$
   $-\frac{3\pi}{2}$ радиан — это -270°. Прибавим 2π (полный оборот): $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{2}.$
   $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \sin(\frac{\pi}{2}) = 1.$
3. Результат: $8\cdot(0 + i\cdot 1) = 8i.$
   Ответ: $8i.$

Задание 5. (*)

Найти $\sqrt[3]{-8}$ — это значит решить уравнение $z^3 = -8$. Запишем число -8 в тригонометрической форме:

$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$. Здесь $r = 8, \varphi = \pi$.

Корень n-й степени (n=3) вычисляется по формуле:

$z_k = \sqrt[3]{8}\ \cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\ ,\quad k = 0, 1, 2.$

$\sqrt[3]{8} = 2.$

- При $k = 0$:
  $z_0 = 2\ \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\ = 2\ \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\ = 1 + i\sqrt{3}.$
- При $k = 1$:
  $z_1 = 2\ \cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\ = 2\ \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\ = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = 2(-1+0i) = -2.$
- При $k = 2$:
  $z_2 = 2\ \cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\ = 2\ \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\ = 2\ \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\ = 1 - i\sqrt{3}.$

Изображение на плоскости: Три точки, лежащие на окружности радиусом 2, на углах $60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$.

Ответ: $1 + i\sqrt{3},\ -2,\ 1 - i\sqrt{3}.$

Ключ к разделу 5

Ответ
Задание 1. Всего билетов: 25. Подготовлено: 11 первых + 8 последних = 19 билетов. Не подготовлено: 25 − 19 = 6 билетов. Вероятность получить неподготовленный билет: $$P = \frac{6}{25} = 0,24.$$
Задание 2. При бросании двух кубиков общее число исходов: $6 \times 6 = 36$. Сумма 8: благоприятные исходы – (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2) → 5 исходов. Сумма 7: благоприятные исходы – (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1) → 6 исходов. Вероятность выигрыша Антона: $\frac{5}{36}$. Вероятность выигрыша Игоря: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Так как $\frac{5}{36} \neq \frac{1}{6}$, шансы не одинаковы (у Игоря больше).

Задание 3.

Всего билетов: 1500, выигрышных: 120.

Вероятность выигрыша:

$$P = \frac{120}{1500} = \frac{2}{25} = 0,08.$$

Задание 4.

Всего шаров: 10. Из них: черных – 5, белых – 2, красных – 3 (так как 10 − 5 − 2 = 3).

- Вероятность вытащить черный шар: $\frac{5}{10} = 0,5$.
- Вероятность вытащить не красный (черный или белый): $\frac{5+2}{10} = \frac{7}{10} = 0,7$.
- Вероятность вытащить красный: $\frac{3}{10} = 0,3$.

Ключ к разделу 6

Ответ
Вариант 1

№1. Множество $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ называется множеством **натуральных чисел**.

№2.

- $A \cup B$ — **объединение множеств** (элементы, принадлежащие хотя бы одному из множеств).
- $A \triangle B$ — **симметрическая разность множеств** (элементы, принадлежащие ровно одному из множеств).

№3.

Даны множества:
$A = \{2, 5, 6\}$,
$B = \{4, 5, 6\}$,
$C = \{2, 3\}$.

- Декартово произведение $A \times B$:

$$A \times B = \{(2,4), (2,5), (2,6), (5,4), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}.$$

- Декартов квадрат $C^2 = C \times C$:

$$C^2 = \{(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\}.$$

Вариант 2

№1. Множество $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ называется множеством **целых чисел.**

№2.

- $A \cap B$ — **пересечение множеств** (элементы, принадлежащие одновременно A и B).
- $\overline{A}$ — **дополнение множества** A (элементы, не принадлежащие A).

№3.

Даны множества:
$A = \{1, 3, 7\}$,
$B = \{5, 2, 4\}$,
$C = \{1, 3\}$.

- Декартово произведение $A \times B$:

$$A \times B = \{(1,5), (1,2), (1,4), (3,5), (3,2), (3,4), (7,5), (7,2), (7,4)\}.$$

- Декартов квадрат $C^2 = C \times C$:

$$C^2 = \{(1,1), (1,3), (3,1), (3,3)\}.$$

Вариант 3

№1. Множество

$$Q = \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$$

называется множеством **рациональных чисел.**

№2.

- $A \setminus B$ — **разность множеств** (элементы, принадлежащие A, но не принадлежащие B).
- $A \times B$ — **декартово произведение** множеств (множество упорядоченных пар, где первый элемент из A, второй из B).

№3.

Даны множества:
$A = \{3, 1, 6\}$,
$B = \{1, 3, 8\}$,
$C = \{1, 2\}$.

- Декартово произведение $A \times B$:

$$A \times B = \{(3,1), (3,3), (3,8), (1,1), (1,3), (1,8), (6,1), (6,3), (6,8)\}.$$

- Декартов квадрат $C^2 = C \times C$:

$$C^2 = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}.$$

Ключи к индивидуальным заданиям

Вариант 1

1. Дифференциальное уравнение

$dy = (2x^2 - 5)\,dx$

Интегрируем: $y = \frac{2}{3}x^3 - 5x + C.$

Подставляем $x = 1, y = -4$:

$-4 = \frac{2}{3} - 5 + C \Rightarrow C = \frac{1}{3}.$

Частное решение:

$$y = \frac{2}{3}x^3 - 5x + \frac{1}{3}.$$

2. Сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

Ряд сходится.

3. Метод Крамера

Система:

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 12 \\ -7x + 9y + 3z = -6 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \end{cases}$$

Главный определитель $\Delta = -165.$

$\Delta_x = -495,\ \Delta_y = -165,\ \Delta_z = -330.$

Решение:

$$x = \frac{-495}{-165} = 3, \quad y = \frac{-165}{-165} = 1, \quad z = \frac{-330}{-165} = 2.$$

4. Метод Гаусса (та же система)

Приведение к треугольному виду даёт:

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 12 \\ 22y + 19z = 60 \\ -30z = -60 \end{cases}$$

Обратный ход: $z = 2,\ y = 1,\ x = 3.$

5. Действия с комплексными числами $(3+5i)$ и $(7-2i)$

- Сумма: $10+3i$
- Разность: $-4+7i$
- Произведение: $31+29i$
- Частное: $\frac{11}{53}+\frac{41}{53}i$

Вариант 2

1. Дифференциальное уравнение

$x^2\,dx + y\,dy = 0 \Rightarrow y\,dy = -x^2\,dx$

Интегрируем: $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^3}{3} + C \Rightarrow y^2 = -\frac{2}{3}x^3 + 2C$

Подставляем $x=0, y=1$: $1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

Частное решение:

$$y = \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^3}.$$

2. Сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)\cdot 2^n}$$

По признаку Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

Ряд сходится.

3. Метод Крамера

Система:

$$\begin{cases} 3x - 8y + 6z = 5 \\ -5x + 4y + 3z = 12 \\ 7x + 2y - 5z = -4 \end{cases}$$

Главный определитель $\Delta = -274$.

$\Delta_x = -274,\ \Delta_y = -548,\ \Delta_z = -822.$

Решение:

$$x = \frac{-274}{-274} = 1, \quad y = \frac{-548}{-274} = 2, \quad z = \frac{-822}{-274} = 3.$$

4. Метод Гаусса (та же система)

Приведение к треугольному виду:

$$\begin{cases} 3x - 8y + 6z = 5 \\ -28y + 39z = 61 \\ 822z = 2466 \end{cases}$$

Обратный ход: $z = 3,\ y = 2,\ x = 1.$

5. **Действия с комплексными числами** $(6 + 2i)$ и $(5 + 3i)$

- Сумма: $11 + 5i$
- Разность: $1 - i$
- Произведение: $24 + 28i$
- Частное: $\frac{18}{17} - \frac{4}{17}i$

Вариант 3

1. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{2x} + \frac{dx}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{2x} = -\frac{dx}{y}$$

Умножаем на $2xy$:

$$y\,dy = -2x\,dx$$

Интегрируем:

$$\frac{y^2}{2} = -x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y^2 = -2x^2 + 2C$$

При $x = 0,\ y = 2$:

$4 = 2C \Rightarrow C = 2$

Частное решение:

$$y^2 = 4 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{4 - 2x^2}$$

2. Сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

Признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1$$

Ряд сходится.

3. Метод Крамера

Система:

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 12 \\ -7x + 9y + 3z = -6 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \end{cases}$$

Главный определитель $\Delta = -165$.

$\Delta_x = -495,\ \Delta_y = -165,\ \Delta_z = -330.$

Решение:

$$x = \frac{-495}{-165} = 3, \quad y = \frac{-165}{-165} = 1, \quad z = \frac{-330}{-165} = 2.$$

3. Метод Крамера

Система:

$$\begin{cases} 4x - 2y + z = 12 \\ -7x + 9y + 3z = -6 \\ 3x + 4y - 2z = 9 \end{cases}$$

Главный определитель $\Delta = -165$.

$\Delta_x = -495,\ \Delta_y = -165,\ \Delta_z = -330.$

Решение:

$$x = \frac{-495}{-165} = 3, \quad y = \frac{-165}{-165} = 1, \quad z = \frac{-330}{-165} = 2.$$

4. Метод Гаусса

Приведение к треугольному виду даёт ту же систему, решение: $x = 3,\ y = 1,\ z = 2.$

5. Действия над комплексными числами $(-2 + 3i)$ и $(7 - 2i)$

- Сумма: $(-2 + 3i) + (7 - 2i) = 5 + i$
- Разность: $(-2 + 3i) - (7 - 2i) = -9 + 5i$
- Произведение: $(-2 + 3i)(7 - 2i) = -8 + 25i$
- Частное: $\frac{-2+3i}{7-2i} = -\frac{20}{53} + \frac{17}{53}i$

Вариант 4

1. Дифференциальное уравнение

$$\frac{2dy}{dx} = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{2}$$

Интегрируем:

$$y = \frac{1+x^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right) + C = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6} + C$$

Подставляем начальное условие $x = 0,\ y = 0$:
$0 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 0.$

Частное решение:

$$y = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{6}$$

2. Сходимость ряда

Общий член ряда: $a_n = \frac{n}{n+1}$.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

Не выполняется необходимый признак сходимости, ряд расходится.

3. Метод Крамера

Система:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 6z = 11 \\ -9x + 2y + 3z = 9 \\ 5x + y - 4z = -8 \end{cases}$$

Главный определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 6 \\ -9 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -31$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -5 & 6 \\ 9 & 2 & 3 \\ -8 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -31, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 6 \\ -9 & 9 & 3 \\ 5 & -8 & -4 \end{vmatrix} = -93, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 11 \\ -9 & 2 & 9 \\ 5 & 1 & -8 \end{vmatrix} = -124$$

Решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-31}{-31} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-93}{-31} = 3, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-124}{-31} = 4$$

4. Метод Гаусса

Расширенная матрица:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 6 & 11 \\ -9 & 2 & 3 & 9 \\ 5 & 1 & -4 & -8 \end{array}\right)$$

Преобразования:

- Ко 2-й строке прибавим 1-ю, умноженную на 9/2? Чтобы избежать дробей, умножим 2-ю на 2 и прибавим 1-ю, умноженную на 9:
  $(2\text{-я}) \cdot 2 + (1\text{-я}) \cdot 9$:
  $-18x + 4y + 6z + 18x - 45y + 54z = 18 + 99 \to 0x - 41y + 60z = 117.$
- К 3-й строке прибавим 1-ю, умноженную на -5/2? Умножим 3-ю на 2 и вычтем 1-ю, умноженную на 5:
  $(3\text{-я}) \cdot 2 - (1\text{-я}) \cdot 5$:
  $10x + 2y - 8z - (10x - 25y + 30z) = -16 - 55 \to 0x + 27y - 38z = -71.$
  Получаем:

$$\begin{cases} 2x - 5y + 6z = 11 \\ -41y + 60z = 117 \\ 27y - 38z = -71 \end{cases}$$

Исключаем y из третьего уравнения: умножим второе на 27, третье на 41 и сложим:
$(-41y + 60z) \cdot 27 + (27y - 38z) \cdot 41$:
$-1107y + 1620z + 1107y - 1558z = 117 \cdot 27 + (-71) \cdot 41$
$62z = 3159 - 2911 = 248 \Rightarrow z = 4.$
Подставляем во второе: $-41y + 240 = 117 \Rightarrow -41y = -123 \Rightarrow y = 3.$
Из первого: $2x - 15 + 24 = 11 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1.$
Ответ: $x = 1,\ y = 3,\ z = 4.$

5. Деление комплексных чисел

$$\frac{5-4i}{6+2i} = \frac{(5-4i)(6-2i)}{(6+2i)(6-2i)} = \frac{30-10i-24i+8i^2}{36+4} = \frac{30-34i-8}{40} = \frac{22-34i}{40} = -\frac{11-17i}{20}$$

Ответ: $\frac{11}{20} - \frac{17}{20}i.$

ЛИСТ РЕГИСТРАЦИИ ИЗМЕНЕНИЙ на _____ учебный год

№ п.п.	Содержание изменения	Дата, номер протокола заседания ПЦК Подпись председателя ПЦК
		_____ № _____ Председатель ПЦК ЕНД _____/_____