

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Лысьвенский филиал федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Пермский национальный исследовательский политехнический университет»
(ЛФ ПНИПУ)
Кафедра «Технических дисциплин»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

«Сопротивление материалов»

Основная профессиональная образовательная программы подготовки
бакалавров по направлениям:

15.03.05 «Конструкторско-технологическое
обеспечение машиностроительных производств»
08.03.01 «Строительство»
22.03.02 «Металлургия»
23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических
машин и комплексов»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ по выполнению курсовой работы и организации самостоятельной работы студентов

Лысьва 2019 г.

Методические указания по выполнению курсовой работы и организации самостоятельной работы студентов по дисциплине «Сопротивление материалов» составлены по материалам Пермского национально-исследовательского политехнического университета./ Сост. Н.Н.Вассерман, В.Е.Калугин, Ю.П.Сметанников, А.П.Жученков и др.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры технических дисциплин протокол «28» августа 2019 г, протокол № 1.

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Общие положения.....	4
2.	Глава 1. Введение	5
3.	Глава 2. Растяжение и сжатие.....	13
4.	Глава 3. Геометрические характеристики плоских сечений.....	27
5.	Глава 4 Основные теории напряженного и деформированного состояния в точке. Гипотезы прочности	40
6.	Глава 5. Кручение	55
7.	Глава 6. Изгиб	65
	Список рекомендуемой литературы.....	89

1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Цель учебной дисциплины – формирование комплекса знаний в области проведения инженерных расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций, обеспечивающих требуемую надежность и безопасность работы изделий.

1.2. Задачи учебной дисциплины:

- изучению теоретических основ и методов проведения расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и машин;
- формирование умений самостоятельно производить типовые расчеты на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций.

Предметом изучения дисциплины являются следующие объекты:

- инженерные расчеты на прочность и жесткость стержневых систем, работающих на растяжение и сжатие, сдвиг, кручение и изгиб;
- методы испытаний по определению характеристик прочности, пластичности и упругости материалов;
- основы теории напряженно и деформированного состояния в точке тела;
- классические теории критерии прочности и пластичности материалов;
- расчеты на прочность и жесткость при сложном сопротивлении изделий;
- расчеты на устойчивость сжатых стержней;
- расчеты на прочность при динамическом и циклическом характере нагружения изделий.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен освоить части указанных в пункте 1.1 компетенций и продемонстрировать следующие планируемые результаты обучения:

Знать:

- законы механики;
- основные понятия и гипотезы, используемые в курсе «Сопротивление материалов»;
- теоретические положения, лежащие в основе расчетов на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций;
- виды простого и сложного нагружения элементов конструкций;
- закон упругости для растяжения (сжатия), для чистого сдвига, обобщенный закон Гука;
- существующие методы стандартных испытаний для определения механических свойств материалов;
- сущность процессов и явлений, возникающих при деформировании материалов;
- классические теории прочности и критерии пластичности материалов;
- основы проведения расчетов элементов конструкции при сложных видах сопротивления, а также в условиях циклического характера нагружения изделия;

Уметь:

- ориентироваться в выборе расчетных схем элементов конструкций;

- проводить расчеты на прочность, жесткость и устойчивость стержневых систем;
- подбирать и использовать справочную литературу, необходимую для проведения инженерных расчетов;
- определять механические характеристики материалов по результатам проведенных лабораторных испытаний;
- выбирать и применять соответствующие теории прочности при проектировании и расчете элементов конструкций.

ГЛАВА 1

ВВЕДЕНИЕ

1.1. Общие определения

При проектировании инженерных сооружений и машин вопрос о выборе размеров отдельных частей с позиции прочности играет весьма важную роль. Для решения этой задачи приходится, прежде всего, выяснить те внешние усилия, которые действуют на сооружения, затем по этим силам необходимо определить внутренние усилия, возникающие в частях сооружений и машин. Для обеспечения прочности и долговечности сооружения нужно выбрать размеры частей так, чтобы внутренние усилия не превосходили известных норм, устанавливаемых для различных материалов на основании опытного исследования их прочности.

Сопротивление материалов называется наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов машин и сооружений.

Под прочностью понимают способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку, не разрушаясь.

В отличие от курса теоретической механики сопротивление материалов наделяет реальные тела свойствами деформируемости – изменчивости геометрических размеров и формы. В связи с этим, кроме расчетов на прочность, во многих случаях проектирования производят расчеты на жесткость и устойчивость.

Под жесткостью подразумевают способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам с точки зрения деформаций (изменение формы, размеров).

Под устойчивостью понимается способность конструкции сохранять первоначальную форму упругого равновесия при воздействии внешних нагрузок.

Сопротивление материалов рассматривает методы расчетов элементов конструкции и вопросы расчета некоторых простейших конструкций. Вопросы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость самих конструкций занимается строительная механика.

В методических указаниях и контрольных заданиях данного пособия рассматриваются схематизированные типовые элементы машиностроитель-

ных, строительных, транспортных и других конструкций, которые и предлагаются к расчету на прочность, жесткость и устойчивость.

Основная цель настоящего пособия – помочь студентам освоить методики и приобрести навыки расчетов по различным разделам курса «Сопротивление материалов».

1.2. Методические указания

В связи с определенными трудностями, которые возникают у начинающего изучать курс «Сопротивление материалов», рекомендуется изучение дисциплины в следующей последовательности:

предварительно ознакомиться с учебным материалом по учебникам и учебным пособиям, обращая внимание на понимание физической сущности явлений, принимаемые допущения и ограничения;

на основании полученных представлений от предварительного изучения курса надо решить несколько задач, относящихся к разделу и рекомендованных в пособии; углубленно изучить раздел курса сопротивления материалов и законспектировать основные положения, необходимость в которых определяется индивидуально самим студентом.

В конце каждой темы методического пособия даются вопросы для самопроверки. Изучив тему, необходимо решить соответствующие задачи курсовой работы.

1.3. Основные понятия, метод сечения

Основными понятиями науки о сопротивлении материалов являются понятия реального объекта и расчетной схемы, внешних и внутренних силовых факторов, геометрических характеристик, напряжений (полное, нормальное, касательное), деформаций и перемещений (линейные, угловые). Сюда относятся также основные физические законы, общие гипотезы и методы, при помощи которых устанавливаются зависимости между этими понятиями.

При выборе расчетной схемы вводятся упрощения в геометрию реального объекта.

Основным упрощающим приемом в сопротивлении материалов является приведение геометрической формы тела к схеме стержня, оболочки, пластины, массива.

Под стержнем понимается тело, одно из измерений которого (длина) значительно больше двух других. Геометрия стержня может быть образована путем перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой. Эта кривая называется осью стержня, а плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется поперечным сечением. Для стержня обозначим продольную ось – Z , в поперечном сечении главные оси – X и Y .

Оболочка – такое геометрическое тело, у которого одно из измерений (толщина) значительно меньше других (радиусов кривизны и габаритных размеров). К оболочкам могут быть отнесены стенки баков, купола и др.

Как и всякая наука, сопротивление материалов идет от простого к сложному, решая сначала элементарные задачи растяжения – сжатия, сдвига, изгиба и кручения, а затем используя эти решения для задач сложного нагружения.

Внешние силы, действующие на реальный объект, чаще всего известны. Обычно необходимо определить внутренние силы (результат взаимодействия между отдельными частями данного тела) которые неизвестны по величине и направлению, но знание которых необходимо для прочностных и деформационных расчетов. Определение внутренних сил осуществляется с помощью так называемого метода сечений, сущность которого заключается в следующем:

1. Мысленно разрезают тело по интересующему нас сечению.

2. Отбрасывают одну из частей (независимо какую).

3. Заменяют действие отброшенной части тела на оставшуюся системой сил, которые в данном случае переходят в разряд внешних. Силы упругости по принципу действия и противодействия всегда взаимны и представляют непрерывно распределенную по сечению систему сил. Их значение и ориентация в каждой точке сечения произвольны, зависят от ориентации сечения относительно тела, величины и направления внешних сил, геометрических размеров тела. Внутренние силы можно привести к главному вектору \bar{R} и главному моменту \bar{M} . За точку приведения обычно принимают центр тяжести сечения. Выбрав систему координат X, Y, Z (Z – продольная ось по нормали к поперечному сечению, X и Y – в плоскости этого сечения) и начало системы в центре тяжести, обозначим проекции главного вектора \bar{R} на координатные оси через N, Q_x, Q_y , а проекции главного момента \bar{M} – M_x, M_y, M_z . Эти три силы и три момента называют внутренними силовыми факторами в сечении:

N – продольная сила,

Q_x, Q_y – поперечные силы,

M_z – крутящий момент,

M_x, M_y – изгибающие моменты.

4. Так как внутренние силы находятся в равновесии с внешними силами, они могут быть определены из уравнений равновесия статики:

$$\begin{aligned} \sum P_z=0, \sum P_y=0, \sum P_x=0, \\ \sum M_x=0, \sum M_y=0, \sum M_z=0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Любой внутренний силовой фактор в сечении равен алгебраической сумме соответствующих внешних силовых факторов, действующих с одной стороны от сечения.

Внутренний силовой фактор в сечении численно равен интегральной сумме соответствующих элементарных внутренних сил или моментов по всей площади сечения:

$$\begin{aligned}
Q_y &= \int_F dQ_y, & M_x &= \int_F dM_x, \\
Q_x &= \int_F dQ_x, & M_y &= \int_F dM_y, \\
N &= \int_F dN & M_z &= \int_F dM_z.
\end{aligned}
\tag{1.2}$$

Классификация основных видов нагружения связана с внутренним силовым фактором, возникающим в сечении. Так, если в поперечных сечениях возникает только продольная сила N , а другие внутренние силовые факторы обращаются в нуль, то на этом участке имеет место растяжение или сжатие, в зависимости от направления силы N . Нагружение, когда в поперечном сечении возникает только поперечная сила Q , называют сдвигом.

Если в поперечном сечении возникает только крутящий момент M_k (M_z), то стержень работает на кручение. В случае, когда от внешних сил, приложенных к стержню возникает только изгибающий момент M_x (или M_y), то такой вид нагружения называют чистым изгибом в плоскости yz (или xz). Если в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом (например, M_x) возникает поперечная сила Q_y , то такой вид нагружения называют плоским поперечным изгибом (в плоскости yz). Вид нагружения, когда в поперечном сечении стержня возникают только изгибающие моменты M_x и M_y , называют косым изгибом (плоским или пространственным). При действии в поперечном сечении нормальной силы N и изгибающих моментов M_x и M_y возникает нагружение, называемое сложным изгибом с растяжением сжатием или внецентренным растяжением (сжатием). При действии в сечении изгибающего момента и крутящего момента возникает изгиб с кручением.

Общим случаем нагружения называют случай, когда в поперечном сечении возникают все шесть внутренних силовых факторов.

К особым видам нагружения следует отнести смятие, когда деформация носит местный характер, не распространяясь на всё тело и продольный изгиб (частный случай общего явления потери устойчивости).

1.4. Понятие о напряжениях

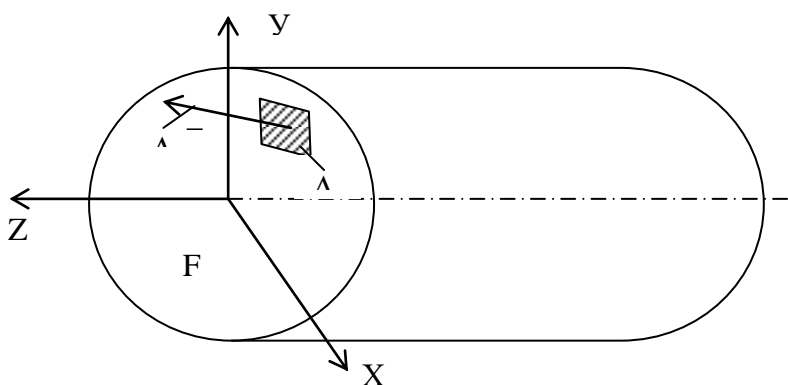


Рис 1

Величина внутренних силовых факторов не отражает интенсивности напряженного состояния тела, близости к опасному состоянию (разрушению). Для оценки интенсивности внутренних сил вводится критерий (числовая мера), называемый напряжением. Если в попе-

речном сечении F некоторого тела выделим элементарную площадку ΔF , рис.1.1, в пределах которой выявлена внутренняя сила ΔR , то за среднее напряжение на площадке ΔF может быть принято отношение:

$$\bar{p}_{CP} = \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F}. \quad (1.3)$$

Истинное напряжение в точке можно определить, уменьшая площадку:

$$\bar{p} = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta F}. \quad (1.4)$$

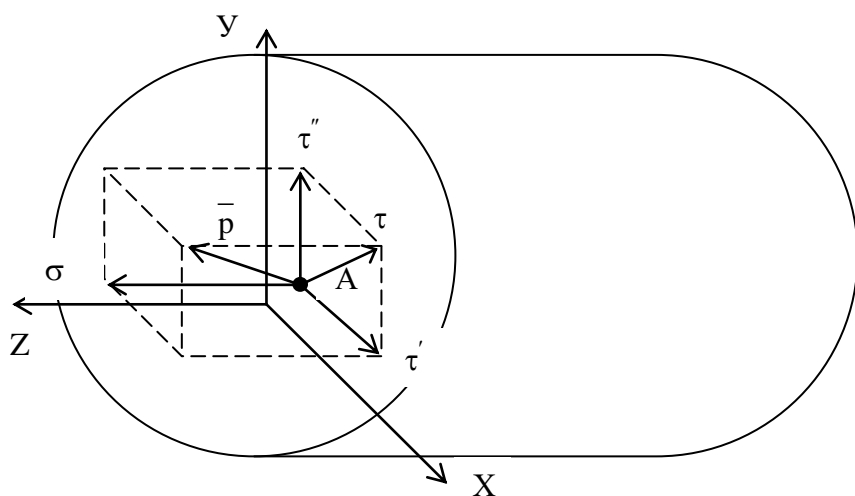


Рис.1.2.

Векторная величина p представляет собой полное напряжение в точке. Размерность напряжения принимается в Па (Паскаль) или МПа (Мегапаскаль). Полное напряжение обычно в расчетах не применяется, а определяется его нормальная к сечению составляющая σ - нормальное напряжение, и касательные τ' , τ'' - касательные напряжения (рис.1.2).

Полные напряжения, приходящиеся на единицу площади, можно выразить через нормальные и касательные напряжения:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.5)$$

Между действующими напряжениями и внутренними силовыми факторами существует следующая связь:

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF; \\ Q_Y &= \int_F \tau'' dF; \\ Q_X &= \int_F \tau' dF; \\ M_X &= \int_F y \sigma dF; \\ M_Y &= \int_F x \sigma dF; \\ M_K &= \int_F (\tau'' \cdot x - \tau' \cdot y) dF. \end{aligned}$$

Нормальные и касательные напряжения являются функцией внутренних силовых факторов и геометрических характеристик сечения. Эти напряжения,

вычисленные по соответствующим формулам, можно назвать фактическими или рабочими.

Наибольшее значение фактических напряжений ограничено предельным напряжением, при котором материал разрушается или появляются недопустимые пластические деформации. Первая из этих границ существует у любого хрупкого материала и называется пределом прочности (σ_B, τ_B), вторая имеет место только у пластичных материалов и называется пределом текучести (σ_T, τ_T). При действии циклически изменяющихся напряжениях разрушение происходит при достижении так называемого предела выносливости (σ_R, τ_R), значительно меньшего, чем соответствующие пределы прочности.

1.5. Деформации и перемещения

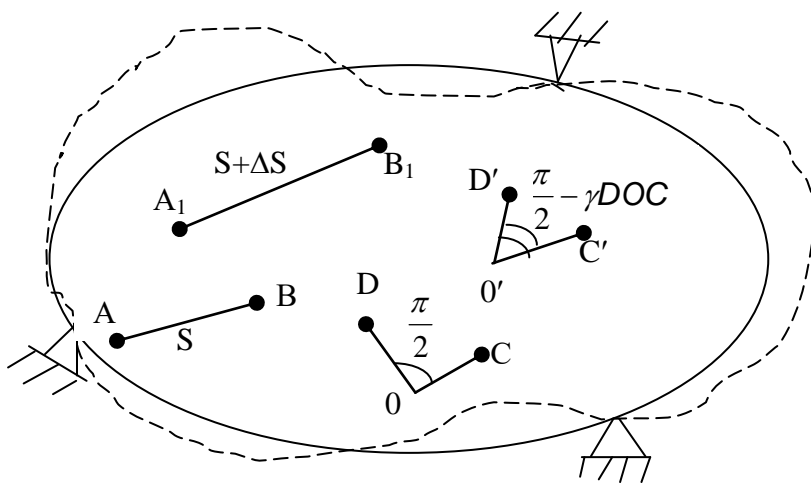


Рис.1.3.

При воздействии внешних сил тело деформируется, изменяя свои размеры и форму. С физической точки зрения деформации могут быть упругими, пластическими и вязкими.

Упругими называются деформации, возникающие сразу и полностью после приложения нагрузки и сразу же и полностью исчезающие после ее снятия.

Пластическими (остаточными) называются деформации, не исчезающие ни сразу после снятия нагрузки, ни по истечении достаточно большого времени.

Вязкими называются деформации, развивающиеся в теле с течением времени, без изменения нагрузки.

В курсе сопротивления материалов объектом изучения является в основном упругая деформация.

В геометрическом смысле любая деформация может быть представлена как совокупность линейных (ϵ) и угловых (γ) деформаций (рис.1.3).

$$\epsilon_{AB} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}, \quad (1.7)$$

$$\gamma_{COD} = \lim_{\substack{OC \rightarrow 0 \\ OD \rightarrow 0}} (\angle COD - \angle C'O'D'). \quad (1.8)$$

ϵ – относительная линейная деформация в продольном направлении.

γ – угловая деформация (угол сдвига).

Накопление деформаций в связанных друг с другом элементах твердого тела приводит к изменению их первоначального положения в пространстве. Эти изменения называются перемещениями. Перемещение может быть линейным и угловым. Линейным перемещением, например, является прогиб балки в

каком-либо сечении, угловым перемещением – поворот сечения при изгибе и кручении.

Поскольку перемещения – следствие накопления деформаций в элементах тела, они должны быть интегральными функциями внутренних силовых факторов.

Понятия перемещения и деформация не следует смешивать. Можно привести много примеров, когда деформация есть, а перемещения нет и, наоборот, при отсутствии деформаций имеет место перемещения.

1.6. Основные гипотезы науки о сопротивлении материалов

В теории сопротивления материалов принимают некоторые гипотезы применительно к структуре и свойствам материалов, а так же о характере деформаций.

1. Гипотеза о сплошности материала.

Принимается инженерная модель материала, по которой предполагается, что материал сплошь заполняет форму тела.

2. Гипотеза об однородности и изотропности.

Материал предполагается однородным и изотропным, т.е. в любом объеме и в любом направлении свойства материала считаются одинаковыми. В некоторых случаях предположение об изотропности не приемлемо. Например, к анизотропным материалам относятся древесина, бетон, некоторые композиционные материалы.

3. Гипотеза о малости деформаций.

Предполагается, что деформации малы по сравнению с размерами тела. Это позволяет в большинстве случаев пренебречь изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела и составлять уравнения статики для недеформированного тела. В некоторых случаях этот принцип не применим. Такие варианты оговариваются особо.

4. Гипотеза об идеальной упругости.

Все тела предполагаются абсолютно упругими. Отклонения от идеальной упругости, которые всегда наблюдаются при нагружении реальных тел, несущественны и ими пренебрегают до определенных пределов деформирования.

5. Принцип независимости действия сил.

Результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности. Этот принцип применим в тех случаях, когда могут быть использованы закон Гука и предпосылка о малости деформации.

6. Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли).

Поперечные сечения бруса, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки.

1.7. Связь между деформациями и напряжениями Закон Гука

Физическая индивидуальность твердых тел, с точки зрения сопротивления материалов, заключается в том, что для каждого из них связь между внешними силами и вызываемыми ими перемещениями различна.

Впервые эту связь установил в 1660 г. Роберт Гук. Тем самым было положено начало сопротивлению материалов как науки.

Для линейного напряженного состояния этот закон в современной трактовке гласит: напряжение прямо пропорционально относительной продольной деформации и зависит от упругих свойств тела.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon . \quad (1.9)$$

где E – модуль упругости (Па).

Закон Гука справедлив только до напряжения, называемого пределом пропорциональности.

Для чистого сдвига закон Гука имеет вид:

$$\tau = G \cdot \gamma . \quad (1.10)$$

где G – модуль сдвига (Па).

Модуль сдвига связан с модулем продольной упругости:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} . \quad (1.11)$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется наукой о сопротивлении материалов.
2. Реальный объект и расчетная схема.
3. Схематизация свойств материала, форм геометрических тел, сил. Внутренние силы, метод сечения.
4. Понятия о напряжениях, полном, нормальном, касательном.
5. Предельное напряжение, допускаемое напряжение, нормированный запас прочности.
6. Понятие о деформациях и перемещениях, их отличие.
7. Связь напряжений с силовыми факторами.
8. Основные гипотезы в науке о сопротивлении материалов.

ГЛАВА II РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1. Продольные силы в поперечных сечениях

Растяжением или сжатием называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N .

Продольная сила, считается положительной, если она вызывает растяжение (направлена от сечения), и отрицательной, если она вызывает сжатие (направлена к сечению).

В произвольном сечении продольная сила численно равняется алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, действующих по одну сторону от взятого сечения.

При этом, внешние силы, направленные от сечения входят в уравнение со знаком плюс, а направленные к сечению – со знаком минус, что соответствует указанному выше правилу знаков для продольной силы.

$$N = \sum_{i=1}^n P_i + \int q \cdot dz \quad (2.1)$$

Интегрирование производится по длине участков, на которых действует распределенная нагрузка, а суммирование – по всем участкам, расположенным по одну сторону от исследуемого сечения.

Примером распределенной нагрузки является собственный вес материала стержня. Интенсивность сил тяжести в пределах каждого участка ступенчатого стержня будет величиной постоянной и равной:

$$q = \gamma \cdot F, \quad (2.2)$$

где γ - вес единицы объема материала, F - площадь поперечного сечения.

При растяжении – сжатии интенсивность распределенной нагрузки и продольная сила связаны между собой следующей дифференциальной зависимостью:

$$\frac{dN}{dz} = q \quad (2.3)$$

Для наглядного представления о характере распределения продольных сил по длине стержня строится эпюра продольных сил.

При построении эпюры следует руководствоваться некоторыми правилами, вытекающими как из метода сечений, так и из дифференциальной зависимости между q и N .

1. Если на участке стержня отсутствует распределенная нагрузка, то продольная сила постоянна.

2. Если на участке имеется равномерно распределенная нагрузка, то продольная сила изменяется по линейному закону.

3. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, эпюра продольных сил имеет скачок на величину этой силы.

4. В концевых сечениях стержня продольные силы равны приложенным в этих сечениях внешним сосредоточенным силам.

2.2. Напряжения, деформации и перемещения

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, вычисляются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{F}, \quad (2.4)$$

Для однородного по длине стержня постоянного сечения при действии продольной силы N нормальные напряжения будут постоянными как по сечению, так и по всей длине. Такое напряженное состояние называется однородным.

При осевом растяжении или сжатии стержня, выполненного из пластичного материала, условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{max} = \frac{|N_{max}|}{F} \leq [\sigma], \quad (2.5)$$

где σ_{max} и N_{max} – нормальное напряжение и продольная сила в опасном поперечном сечении; $[\sigma]$ – допускаемое напряжение.

Для хрупкого материала условие прочности выглядит следующим образом:

$$|\sigma|_{max}^P = \frac{|N'|}{F} \leq [\sigma]^P, \quad (2.6)$$

$$|\sigma|_{max}^C = \frac{|N''|}{F} \leq [\sigma]^C.$$

Здесь $|\sigma|_{max}^P$ и $|\sigma|_{max}^C$ – максимальные растягивающее и сжимающее напряжения. $[\sigma]^P$ и $[\sigma]^C$ – допускаемое напряжение на растяжение и допускаемое напряжение на сжатие.

Определяется допускаемое напряжение по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{np}}{[n]}, \quad (2.7)$$

где σ_{np} – предельное для данного материала напряжение, при котором в материале либо возникают большие пластические деформации, либо происходит разрушение; $[n]$ – нормированный коэффициент запаса прочности.

Для материалов, находящихся в пластичном состоянии, за предельное напряжение принимается предел текучести (σ_T), а для хрупких материалов – предел прочности (σ_B) соответственно при растяжении это σ_B^P и при сжатии σ_B^C .

Таким образом, для пластичных материалов

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[n]}, \quad (2.8)$$

где $n = 1,5 \dots 2$.

Для хрупких материалов

$$[\sigma]^P = \frac{\sigma_B^P}{[n]}, \quad (2.9)$$

$$[\sigma]^C = \frac{\sigma_B^C}{[n]} \quad (2.10)$$

где $n=2,5...3$.

Условие прочности позволяет решать три типа задач.

1. Проверка прочности – проверочный расчет.

По известным продольной силе и размерам поперечного сечения стержня определяют наибольшее напряжение, которое сравнивают с допусковым, либо определяют фактический запас прочности:

$$n = \frac{\sigma_{np}}{|\sigma|_{max}} \geq [n], \quad (2.11)$$

где $[n]$ – нормативный коэффициент запаса прочности; n – фактический коэффициент запаса прочности.

Расчет выполняется непосредственно по формулам 2.5 или 2.6.

2. Подбор сечения – проектировочный расчет.

По известным продольной силе и допусковому напряжению определяется необходимая площадь поперечного сечения стержня:

$$F \geq \frac{|N|}{[\sigma]}. \quad (2.12)$$

3. Определение допускаемой нагрузки.

По известным площади поперечного сечения и материалу (допускаемое напряжение) стержня определяют допускаемое значение продольной силы:

$$|N| \leq F[\sigma]. \quad (2.13)$$

Затем по известной продольной силе вычисляется допускаемое значение внешней нагрузки.

Размеры нагруженного стержня меняются в зависимости от величины приложенных сил. Так, если до нагружения стержня (рис.2.1) его длина была равна ℓ , то после нагружения она станет равной $\ell + \Delta\ell$. Величину $\Delta\ell$ называют абсолютным удлинением стержня.

Мысленно вырежем из стержня бесконечно малый элемент длиной dz . После приложения нагрузки он получит удлинение Δdz . Отношение удлинения к длине элемента

$$\varepsilon = \frac{\Delta dz}{dz}, \quad (2.14)$$

называется продольной линейной деформацией или линейной деформаций.

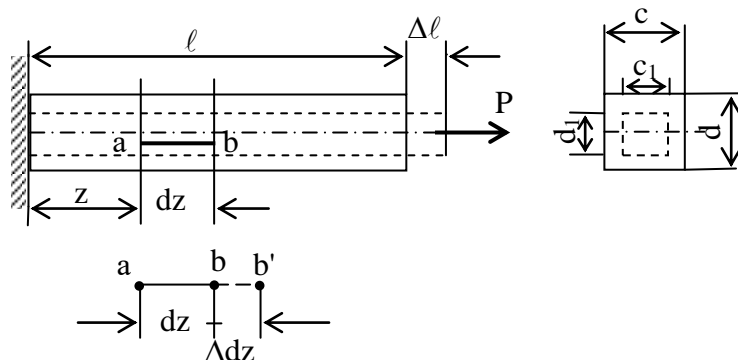


Рис.2.1

В пределах малых удлинений для подавляющего большинства материалов справедлив закон Гука, который устанавливает прямую пропорциональность между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (2.15)$$

где E – модуль упругости, физическая константа материала.

Если в выражении (2.15) заменить σ на N/F , а ε на $\Delta dz/dz$, то $\Delta dz = \frac{N \cdot dz}{E \cdot F}$.

Абсолютное удлинение стержня на длине l будет равно:

$$\Delta l = \int_l \frac{N \cdot dz}{EF}. \quad (2.16)$$

При постоянных продольной силе и площади поперечного сечения в пределах каждого участка, из выражения (2.16) получаем:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \quad (2.17)$$

Изменение поперечных размеров стержня оценивается абсолютной и относительной поперечной деформацией.

$\Delta d = d_k - d_n$ – абсолютная поперечная деформация,

$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d_n}$ – относительная поперечная деформация,

где d_k и d_n – конечный и начальный поперечные размеры стержня.

При растяжении $\varepsilon > 0$, $\varepsilon' < 0$, а при сжатии $\varepsilon < 0$, $\varepsilon' > 0$.

Отношение поперечной деформации к продольной, взятой по абсолютной величине при простом растяжении или сжатии, называется коэффициентом Пуассона и обозначается буквой μ :

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right|. \quad (2.18)$$

Для различных материалов значение коэффициента Пуассона колеблется в пределах от 0 до 0,5.

Из формулы (2.15) следует, что продольная деформация $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, тогда $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$ или

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \frac{\sigma}{E}, \quad (2.19)$$

При деформации бруса в его материале накапливается потенциальная энергия, величина которой находится по формуле:

$$U = \sum_{i=1}^n \int \frac{N^2 dz}{2EF}. \quad (2.20)$$

Для призматического бруса с постоянной по длине продольной силой выражение имеет вид:

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2EF} = \frac{\Delta l^2 EF}{2l}.$$

Удельная потенциальная энергия упругой деформации, т.е. энергия, приходящаяся на единицу объема, будет равна:

$$u = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{\sigma \cdot \varepsilon}{2}. \quad (2.21)$$

Пример 1.

По оси двухступенчатого стального стержня приложены силы $P_1=30$ кН, $P_2=70$ кН и $P_3=100$ кН (рис.2.2). Ступени имеют длины $l_1=25$ см, $l_2=35$ см, $l_3=40$ см. Соответствующие площади поперечных сечений: $F_1=2$ см², $F_2=4$ см². Модуль упругости для материала стержня $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений.

Решение.

1. Построение эпюры N . Разбиваем стержень на три участка, границы которых совпадают с сечениями, где приложены внешние силы. Значения продольной силы на каждом участке определяем, пользуясь методом сечений.

В сечении 1-1 $N_1=P_1=30$ кН. В сечении 2-2 $N_2=P_1-P_2=30-70=-40$ кН. В сечении 3-3 $N_3=P_1-P_2-P_3=30-70+100=60$ кН.

По полученным значениям строится эпюра продольных сил (рис.2.2).

2. Построение эпюры σ . Для вычисления напряжений стержень разбивается на четыре участка. Их границы определяются не только сечениями, где приложены внешние силы, но и сечениями, где меняются поперечные размеры стержня. Пользуясь эпюрой N , находим:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_1}{F_1} = \frac{30 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_2}{F_1} = \frac{-40 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = -133 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_2}{F_2} = \frac{-40 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = -100 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_{DE} = \frac{N_3}{F_2} = \frac{60 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 150 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Проверка прочности стержня на наиболее напряженном участке $\sigma_{\max} = 150 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

По полученным результатам строим эпюру нормальных напряжений.

3. Построение эпюры перемещений Δ .

Определение перемещений начинаем от заделки, где оно равно 0. Перемещение произвольного сечения на расстоянии z равно абсолютному удлинению части стержня, которая заключена между этим сечением и заделкой.

Так, перемещение произвольного сечения на третьем участке может быть вычислено по формуле $w_{(z)} = \frac{N_3 \cdot z}{E \cdot F_2}$.

Это есть уравнение наклонной прямой, так как $w_{(z)}$ линейно зависит от переменной z при прочих постоянных для данного участка параметрах.

Перемещение сечения D относительно заделки равно абсолютному удлинению участка DE $w_D = \Delta_{DE} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,15 \text{ мм}$.

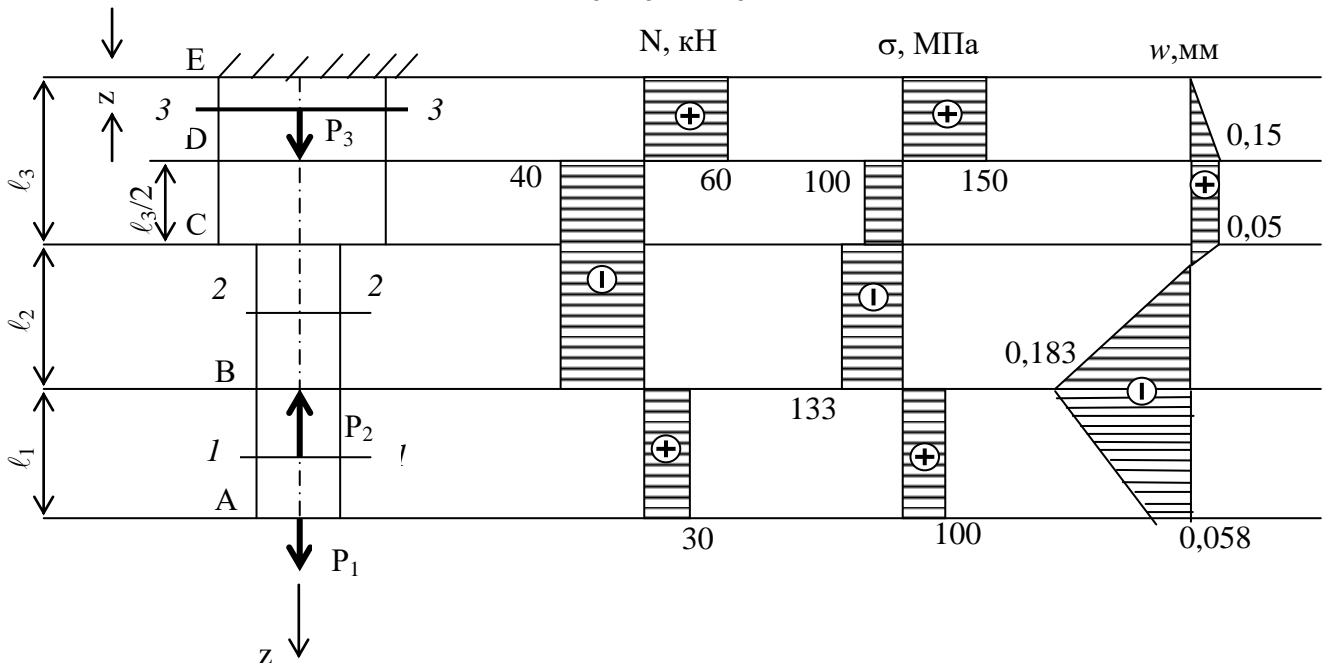


Рис.2.2

Перемещение сечения С относительно заделки складывается из абсолютного укорочения участка CD и удлинения участка DE

$$w_C = -\frac{40 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} + 1,5 \cdot 10^{-4} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,05 \text{ мм.}$$

Аналогично определяем перемещения сечений В и А: $w_B = -0,183 \text{ мм}$; $w_A = -0,058 \text{ мм}$. Эпюра перемещений представлена на рис.2.2.

Пример 2.

Жесткий стержень AC шарнирно закреплён в точке С и поддерживается стальной тягой BD круглого поперечного сечения диаметром 20 мм. На части стержня AC приложена равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью $q=80,0 \text{ кН/м}$ (рис.2.3). Допускаемое напряжение для материала тяги BD

$[\sigma]=160 \text{ МПа}$, модуль упругости $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Проверить прочность тяги и определить перемещение свободного конца жесткого бруса, т.е. точки А.

Решение.

1. Определяем усилие, возникающее в тяге BD под действием приложенной нагрузки. Мысленно рассекаем тягу BD, действие отброшенной верхней части заменяем внутренним усилием N_{BD} (рис.2.4). Составляем уравнение

равновесия системы в виде суммы моментов, действующих на нее сил относительно точки С.

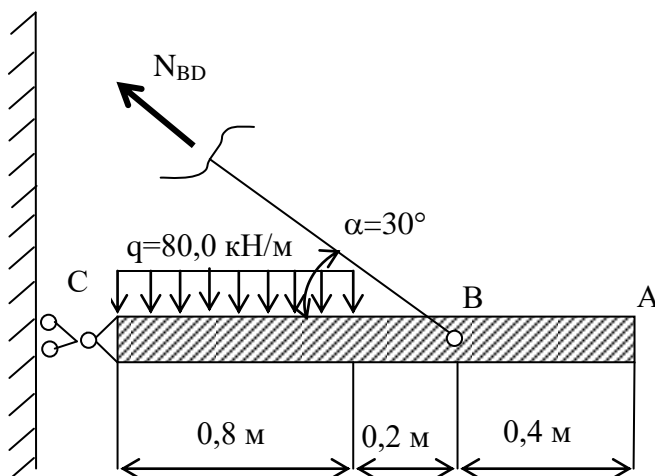


Рис.2.3

Рис.2.4

$$\sum m_C = 0$$

$$-80 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + N_{BD} \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ = 0;$$

$$N_{BD} = \frac{80,0 \cdot 0,8 \cdot 0,4}{0,5 \cdot 1} = 51,2 \text{ кН.}$$

Положительный результат означает, что стержень BD растягивается.

2. Условие прочности для тяги BD имеет вид:

$$\sigma = \frac{N_{BD}}{F_{BD}} \leq [\sigma],$$

$$\text{где } F_{BD} = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2.$$

Тогда

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{51,2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 16,3 \cdot 10^7 \text{ Па} = 163 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа}.$$

Оценим перенапряжение в тяге $\Delta\sigma\% = \frac{163-160}{160} \cdot 100\% = 1,9\% < 5\%$. Так как перенапряжение в тяге не превышает 5%, можно сделать вывод, что прочность тяги ВD обеспечена.

3. Для определения перемещения точки А найдем удлинение Δl тяги ВD и построим план перемещения данной системы, т.е. покажем положение стержневой системы после приложения нагрузки.

Удлинение тяги ВD равно:

$$\Delta l = \frac{N_{BD} \cdot l_{BD}}{E \cdot F_{BD}} = \frac{51,2 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{\cos 30^\circ \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,94 \text{ мм}.$$

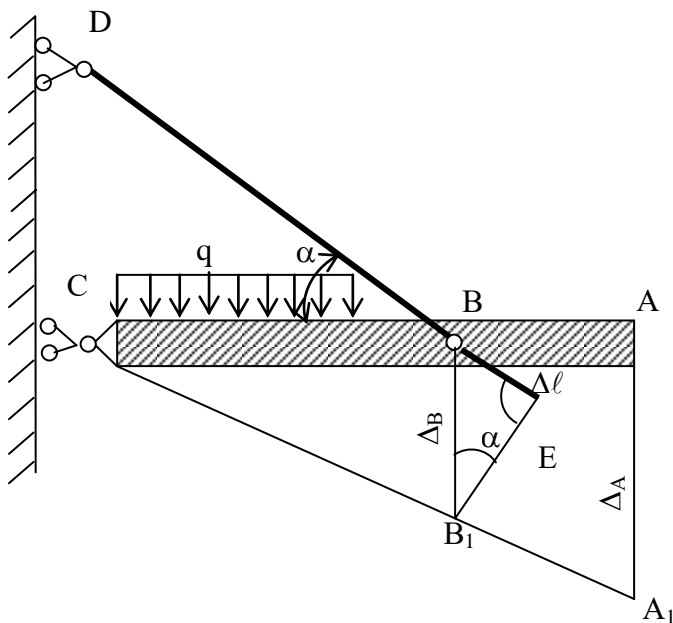


Рис.2.5

План перемещения показан на рис.2.5.

При построении плана перемещения полагаем, что в точке В тяга не соединяется с жестким стержнем АС. Тогда тяга удлинится на величину Δl . Для того чтобы найти новое положение точки В, которая одновременно должна находиться на продолжении тяги Δl и вместе с жестким стержнем перемещаться по дуге радиусом СВ вниз, надо радиусом $DB + \Delta l$ и радиусом СВ произвести засечки. На основании допущения о том, что перемещения точек тела, обуслов-

ленные его упругими деформациями, весьма малы по сравнению с размерами самого тела, заменяем дуги перпендикулярами к соответствующим стержням. Тогда отрезок $ВВ_1$ будет искомым перемещением точки В, а отрезок $АА_1$ есть искомое перемещение точки А – Δ_A .

Из прямоугольного треугольника $ВВ_1Е$ найдем $\Delta_B = \frac{\Delta l}{\sin 30^\circ} = \frac{0,94}{0,5} = 1,88 \text{ мм}$, из подобия треугольников ($\Delta САА_1 \sim \Delta СВВ_1$) получим перемещение точки А.

$$\Delta_A = \Delta_B \frac{AC}{BC} = 1,88 \frac{1,4}{1} = 2,63 \text{ мм}.$$

Пример 3.

Подобрать из условия прочности поперечные сечения стальных стержней кронштейна, нагруженного силой $P=200$ кН, и определить горизонтальное, вертикальное и полное перемещение узла С (рис.2.6).

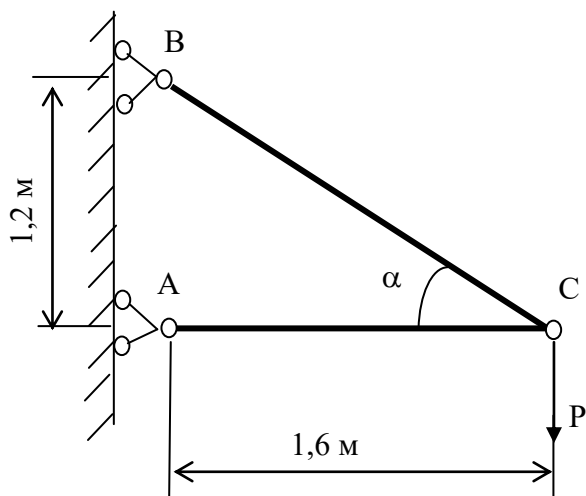


Рис.2.6

Стержень AC двутаврового поперечного сечения, стержень BC круглого поперечного сечения. Допускаемое напряжение для материала стержней $[\sigma]=160$ МПа, модуль упругости $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.

1. Составим уравнения равновесия и определим усилия в стержнях. Для этого мысленно вырежем узел С. В местах разрезов приложим неизвестные пока усилия в направлении, вызывающем

растяжение стержней (рис.2.7).

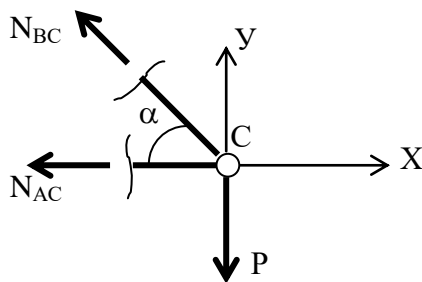


Рис.2.7

$$\Sigma P_y = 0 :$$

$$N_{BC} \sin \alpha - P = 0.$$

$$N_{BC} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{200 \cdot \sqrt{1,2^2 + 1,6^2}}{1,2} = \frac{200 \cdot 2}{1,2} = 333,3 \text{ кН} .$$

$$\Sigma P_x = 0 :$$

$$-N_{AC} - N_{BC} \cdot \cos \alpha = 0.$$

$$N_{AC} = -N_{BC} \cdot \cos \alpha = -333,3 \cdot \frac{1,6}{2} = -266,7 \text{ кН} .$$

Отрицательное значение усилия N_{AC} указывает на то, что стержень испытывает сжатие.

2. Подбираем из условия прочности размеры стержней.

а) Для стержня BC $F_{BC} \geq \frac{|N|_{BC}}{[\sigma]}$, причем $F_{BC} = \frac{\pi d^2}{4}$. Тогда

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot N_{BC}}{\pi [\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 333,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 5,14 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 51,4 \text{ мм} .$$

Принимаем в соответствие с таблицей нормальных размеров $d = 52$ мм. Уточненная площадь стержня BC $F_{BC} = \frac{\pi \cdot 5,2^2}{4} = 21,2 \text{ см}^2$.

б) Для стержня AC $F_{AC} \geq \frac{|N|_{AC}}{[\sigma]} = \frac{266,7 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 16,7 \text{ см}^2$.

В соответствии с сортаментом на двутавровые балки по ГОСТу 8239-72 принимаем двутавр № 14 с $F = 17,4 \text{ см}^2$.

3. Находим изменение длины каждого стержня.

а) Удлинение стержня BC

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot F_{BC}} = \frac{333,3 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 21,2 \cdot 10^{-4}} = 15,72 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,57 \text{ мм} .$$

б) Укорочение стержня AC

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot l_{AC}}{E \cdot F_{AC}} = \frac{-266,7 \cdot 10^3 \cdot 1,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 17,4 \cdot 10^{-4}} = -12,26 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,2 \text{ мм} .$$

4. Определяем перемещение узловой точки C.

План перемещения представлен на рис.2.8.

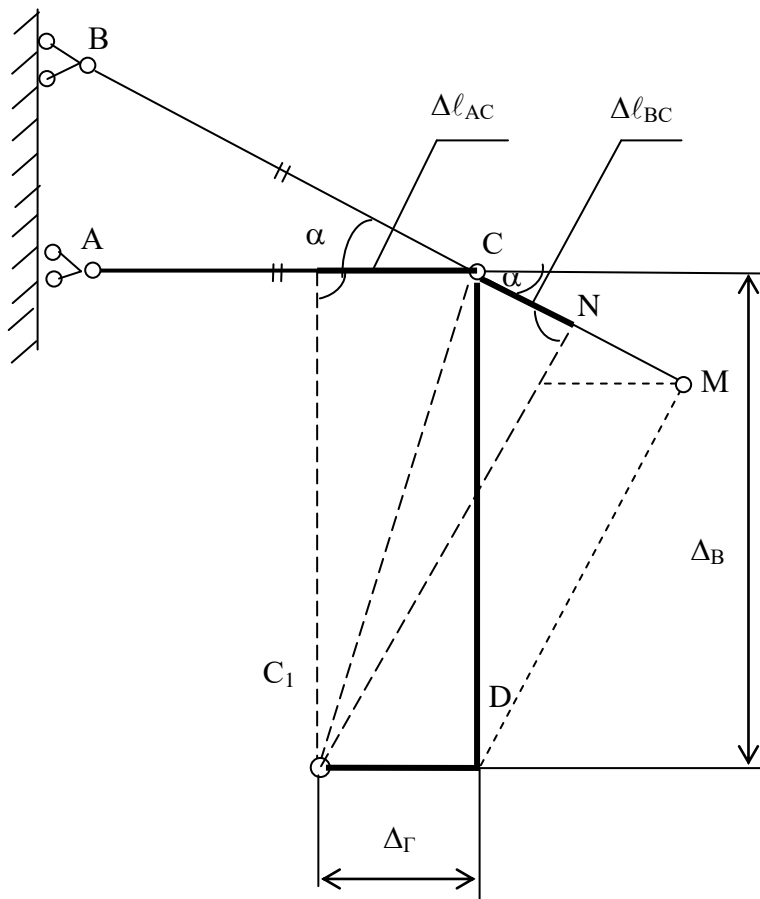


Рис.2.8

Для определения перемещения узла C положим, что стержни в узле C не соединены между собой. Тогда стержень BC удлинится на величину Δl_{BC} , и стержень AC укоротится на величину Δl_{AC} . Новое положение узла C (точка C_1) определится как точка пересечения перпендикуляров к стержням BC и AC, проведенных из конца стержней $BC + \Delta l_{BC}$ и $AC - \Delta l_{AC}$ (вместо дуг радиусов $BC + \Delta l_{BC}$ и $AC - \Delta l_{AC}$). Из схемы видно, что горизонтальное перемещение точки C равно $\Delta \Gamma = |\Delta l_{AC}| = 1,2 \text{ мм}$. Для нахождения второй координаты точки C_1 –

Δ_B проведем из точки D перпендикуляр на продолжение стержня BC. Тогда удлинение Δl_{BC} можно представить как разность отрезков $CN = CM - NM$ или

$\Delta l_{BC} = \Delta_B \cdot \sin \alpha - \Delta \Gamma \cos \alpha$, откуда

$$\Delta_B = \frac{\Delta l_{BC} + |\Delta l_{AC}| \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1,57 + 1,2 \cdot \frac{1,6}{2}}{\frac{1,2}{2}} = \frac{1,57 + 0,96}{0,6} = 4,22 \text{ мм} .$$

Полное перемещение узла С определяется как геометрическая сумма
 $\Delta_n = \sqrt{\Delta_B^2 + \Delta_r^2} = \sqrt{4,22^2 + 1,2^2} = 4,39 \text{ мм}.$

ЗАДАНИЕ НА КУРСОВУЮ РАБОТУ № 1

*Расчеты на прочность статически определимых систем
растяжения-сжатия*

Задача 1.

Проверить прочность и определить перемещение свободного конца стержня. Материал стержня – сталь ($[\sigma]=160 \text{ МПа}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$). Расчетная схема и числовые данные выбираются в соответствии с шифром по рис. 2.9 и таблице 2.1. $F_2=1,6 F_1$.

Таблица 2.1

Цифра шифра	1	2	3	4	5	6
	схема	а, м	P_1 , кН	P_2 , кН	P_3 , кН	F_1 , см ²
1	1	0,30	15	60	100	10
2	2	0,35	20	70	110	11
3	3	0,40	45	80	122	12
4	4	0,45	50	75	130	14
5	5	0,50	35	90	125	12,5
6	6	0,55	30	65	120	15
7	7	0,60	40	75	115	20
8	8	0,65	25	50	110	16
9	9	0,70	30	85	90	14
0	10	0,75	55	77	140	13

Примечание: $F_2 = 1,6F_1$.

Содержание и порядок выполнения задачи

1. Вычертить стержень в масштабе, указать численные значения заданных величин.
2. Определить значения продольной силы на каждом участке и построить эпюру продольных сил по длине стержня.
3. Рассчитать нормальные напряжения на каждом участке и произвести проверку прочности там, где напряжение достигает наибольшего значения. Построить эпюру нормальных напряжений.
4. Вычислить перемещения в характерных сечениях стержня и построить эпюру перемещений.

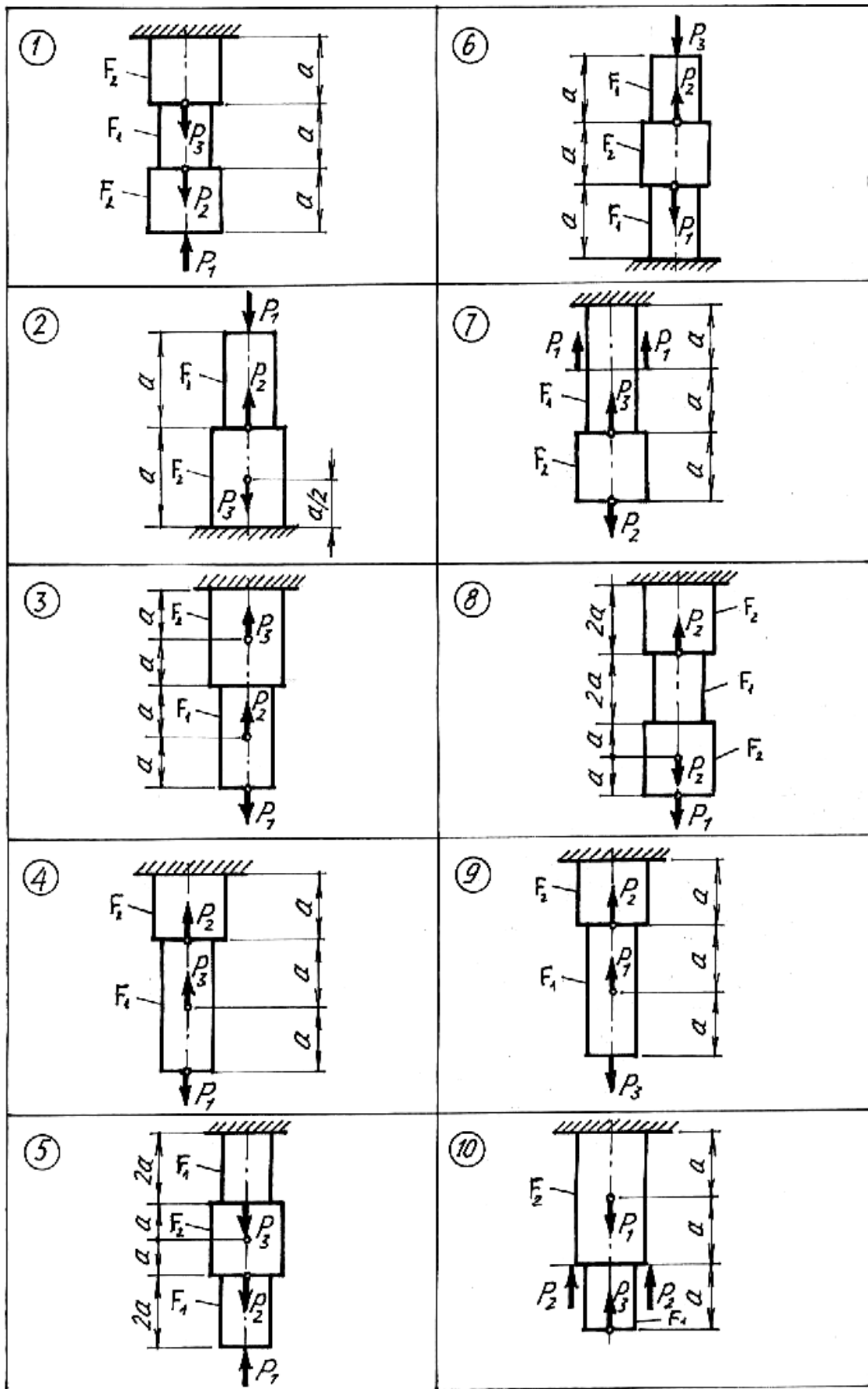


Рис. 2.9.

Задача 2.

П

од
об
ра
ть
из
ус
ло
ви
я
пр
оч
но
ст
и
по
пе
ре
чн
ые
се
че
ни
я
ста
ль
ны
х
сте
рж
не
й
ста
ти
че
ск
и
оп
ре
де

лимой стержневой системы и определить перемещение точки А. Допускаемое нормальное напряжение $[\sigma]=160$ МПа, модуль нормальной упругости $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Расчетная схема и числовые данные выбираются в соответствии с шифром по рис. 2.10 и таблице 2.2.

Таблица 2.2

Цифра шифра	1	2	3	4	5	6
	схема	$l, \text{ м}$	$\alpha, ^\circ$	$\beta, ^\circ$	$\gamma, ^\circ$	$P, \text{ кН}$
1	1	1,5	30	70	50	300
2	2	1,6	35	75	45	350
3	3	1,7	40	65	40	400
4	4	1,8	45	60	35	450
5	5	2,9	50	55	30	500
6	6	2,0	55	50	75	550
7	7	2,1	60	45	70	600
8	8	2,2	65	40	65	650
9	9	2,3	70	35	60	700
0	10	2,4	75	30	65	800

Содержание и порядок выполнения задачи

1. Вычертить схему в масштабе с указанием численных значений заданных величин.
2. Составить уравнения равновесия и определить усилия в стержнях.
3. Подобрать из условия прочности сечения стержней.
4. Определить изменения длины каждого стержня.
5. Построить в масштабе план перемещения точки А.
6. Найти аналитически и проверить графически горизонтальное, вертикальное и полное перемещение точки А.

Вопросы для самопроверки

1. Какой вид нагружения называют растяжением (сжатием)?
2. Как вычисляется продольная сила в произвольном сечении стержня? Как формулируется закон Гука?
3. Что такое продольная и поперечная деформации стержня?
4. Что называется коэффициентом Пуассона?
5. Какой вид имеет условие прочности, и какие типы задач решаются с помощью этого условия?
6. Как определяется допускаемое напряжение для пластичного и хрупкого материала?

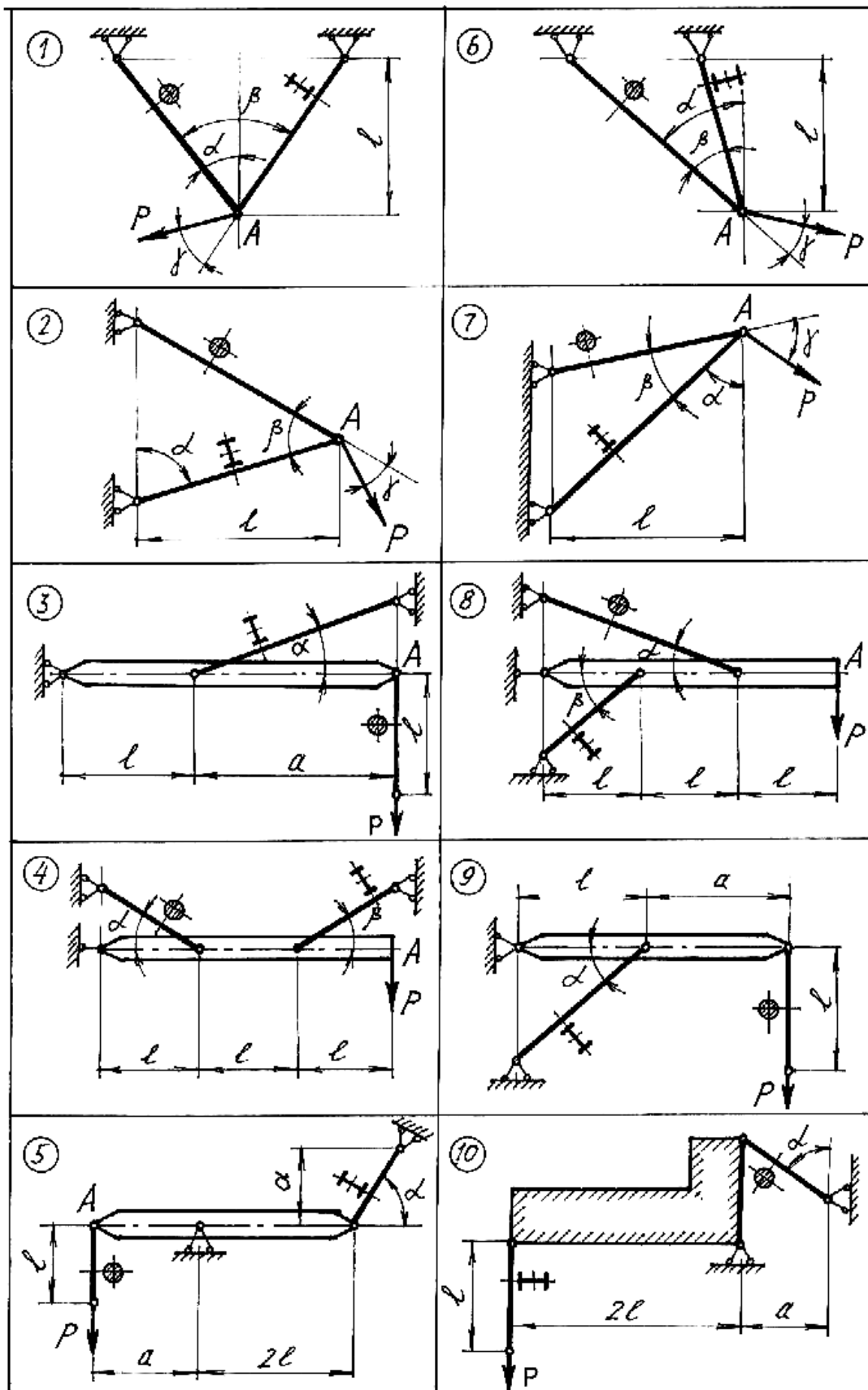


Рис. 2.10.

ГЛАВА III

3.1. Геометрические характеристики плоских сечений

Прочность бруса не всегда зависит только от площади поперечного сечения, как это имеет место при растяжении, сжатии. Как бы вы ни поворачивали стержень относительно продольной оси, условие прочности будет всегда иметь вид $\sigma = \frac{|N|}{F} \leq [\sigma]$.

Другую картину мы имеем при изгибе. Так, при изгибе относительно одной из осей в поперечном сечении мы имеем при одном и том же действующем изгибающем моменте один эффект с точки зрения прогибов и прочности, а относительно другой, перпендикулярной оси, отличающийся от первого. Следовательно, при изгибе условие прочности зависит не только от площади поперечного сечения, но и от какого-то другого геометрического параметра (формы).

Для плоской фигуры (рис.3.1) наиболее часто рассматриваются следующие геометрические характеристики, кроме известных (площадь – F , длина – ℓ):

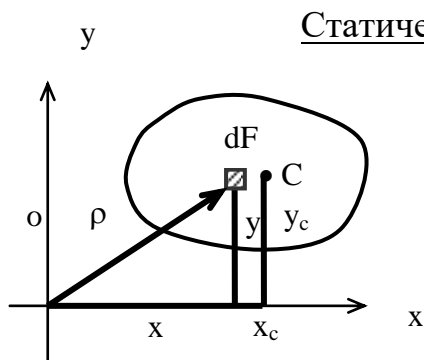


Рис.3.1.

Статические моменты

$$S_x = \int_F y dF ; \quad S_y = \int_F x dF .$$

Статические моменты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Они измеряются в единицах длины в кубе [м^3 , см^3 , мм^3].

Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются центральными. Они всегда проходят через центр тяжести фигуры. На основании теоремы о моменте равнодействующей:

$$S_x = F \cdot y_c ; \quad S_y = F \cdot x_c . \tag{3.1}$$

Из этих соотношений может быть определен центр тяжести для простой фигуры.

$$x_c = \frac{S_y}{F} ; \quad y_c = \frac{S_x}{F} . \tag{3.2}$$

Координаты центра тяжести сложных фигур будут соответственно равны:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} ; \tag{3.3}$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{xi}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i}.$$

Осевые моменты инерции

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF. \quad (3.4)$$

Полярный момент инерции

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF = J_x + J_y. \quad (3.5)$$

Центробежный момент инерции

$$J_{xy} = \int_F x \cdot y dF. \quad (3.6)$$

Моменты инерции всегда больше нуля. Центробежный момент инерции может быть отрицательным, положительным и равным нулю.

Моменты инерции относительно центральных осей называются центральными моментами инерции.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называют главными. Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции. Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Если оси x, y параллельны центральным осям x_c, y_c (рис.3.2), то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_c} + b^2 F; \\ J_y &= J_{y_c} + a^2 F; \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$J_{xy} = J_{x_c y_c} + abF.$$

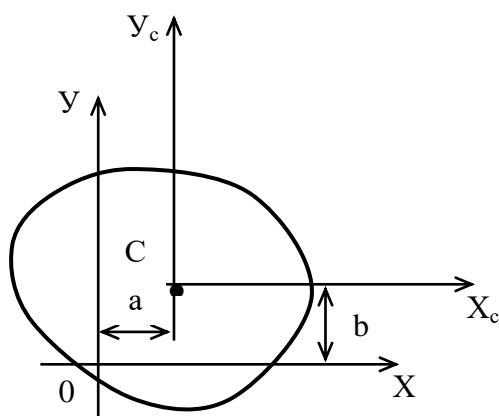


Рис.3.2.

Здесь, a и b – координаты точки O (с учётом знаков), т.е. нового начала координат в старой системе координат x_c, y_c .

Первые слагаемые в правых частях равенств (3.7) являются собственными моментами инерции фигуры, а вторые слагаемые переносными моментами инерции. Моменты инерции относительно осей параллельных центральным всегда увеличиваются, по отношению к центральным на величину рав-

ную произведению площади сечения на квадрат расстояния между рассматриваемыми осями.

Для сложных сечений моменты инерции связаны следующими соотношениями:

$$J_x = \sum_{i=1}^n J_{x_i}; \quad J_y = \sum_{i=1}^n J_{y_i}; \quad J_{xy} = \sum_{i=1}^n J_{x_i y_i}. \quad (3.8)$$

Изменение моментов инерции при повороте осей координат

При повороте осей ($x_1; y_1$) на какой-либо угол α по отношению к исходным (рис.3.3а) моменты инерции изменяются:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{xy} \sin 2\alpha = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$J_{y_1} = J_x \sin^2 \alpha + J_y \cos^2 \alpha + J_{xy} \sin 2\alpha = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{xy} \cos 2\alpha. \quad (3.9)$$

Эти зависимости справедливы только для осей с общим началом координат. Положительный угол α отсчитывается от оси x в направлении кратчайшего поворота ее до совмещения с осью y .

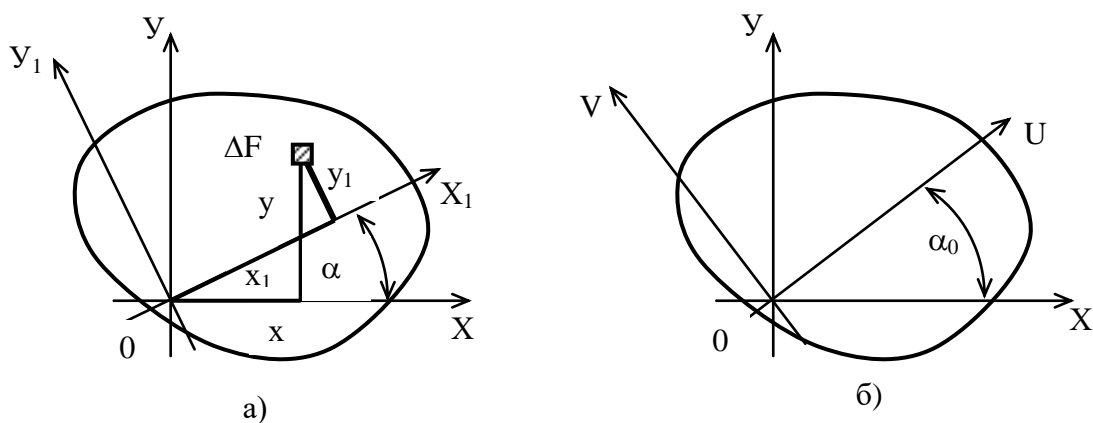


Рис.3.3.

Определение положения главных осей и главных моментов инерции

Положение главных осей находится по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}, \quad (3.10)$$

где α_0 – угол, на который нужно повернуть оси x и y , чтобы получить положение главных осей. При $\alpha_0 > 0$ поворот оси x до совмещения с главной осью производится против часовой стрелки.

Главные моменты инерции вычисляются по формуле (3.9), если в них положить $\alpha = \alpha_0$, или по формулам:

$$J_U = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}, \quad (3.11)$$

$$J_V = \frac{J_x + J_y}{2} \mp \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}.$$

В формулах (3.11) верхние знаки следует брать при $J_x > J_y$, а нижние при $J_x < J_y$.

Правило инварианта: $J_x + J_y = J_{x_n} + J_{y_n} = J_{max} + J_{min} = const$. При повороте осей, сумма осевых моментов инерции относительно перпендикулярных осей остается величиной постоянной.

Понятие о радиусе инерции

Момент инерции фигуры относительно какой-либо оси можно записать в виде произведения площади фигуры на квадрат некоторой величины, которую называют радиусом инерции:

$$J_x = \int_F y^2 dF = F \cdot i_x^2, \quad (3.12)$$

где i_x – радиус инерции относительно оси x .

Тогда

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}. \quad (3.13)$$

Относительно главных осей радиусы инерции будут равны соответственно:

$$i_U = \sqrt{\frac{J_U}{F}}, \quad i_V = \sqrt{\frac{J_V}{F}}. \quad (3.14)$$

3.2. Методика определения положения главных осей и вычисления главных моментов инерции, радиусов инерции

1. Любая сложная фигура разбивается на простейшие (прямоугольник, квадрат, треугольник, полуокружность, четверть окружности и т.д.), геометрические характеристики которых известны, рис.3.4.

2. Проводится произвольная система прямоугольных координат (вспомогательные оси) относительно которых положение центров тяжести любой простейшей фигуры является величиной известной.

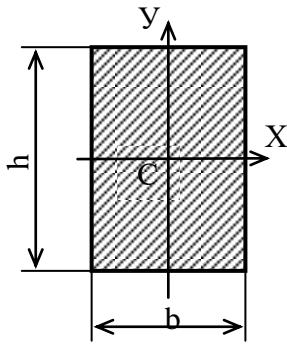
3. По формулам (3.3) определяется центр тяжести всей фигуры и проводятся центральные оси x_c и y_c , которые параллельны центральным осям простейших фигур.

4. Используя зависимость изменения моментов инерции при параллельном переносе осей (формулы 3.7, 3.8), определяют моменты инерции и центробежный момент инерции всей фигуры относительно центральных осей.

5. По формуле (3.10) вычисляют положение главных осей инерции (угол α_0).

6. Определяют по формулам (3.11) главные моменты инерции.

7. По формулам (3.14) вычисляют главные радиусы инерции.



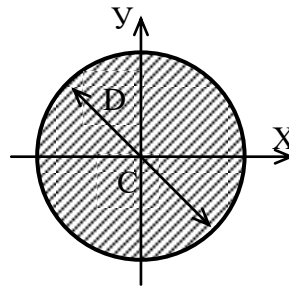
$$F = b \cdot h$$

$$J_x = \frac{bh^3}{12}$$

$$J_y = \frac{hb^3}{12}$$

$$i_x = \frac{h}{2\sqrt{3}}$$

$$i_y = \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

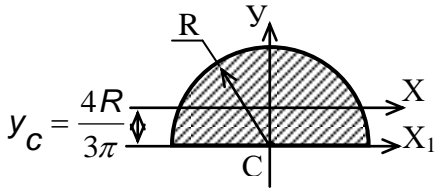


$$F = \frac{\pi D^2}{4}$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{64}$$

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$i_x = i_y = \frac{R}{2}$$



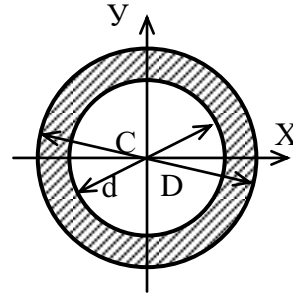
$$F = \frac{\pi D^2}{8}$$

$$J_{x_1} = J_{y_1} = \frac{\pi D^4}{128}$$

$$J_x = 0,11R^4$$

$$i_x = 0,265R$$

$$i_{x_1} = \frac{R}{2}$$

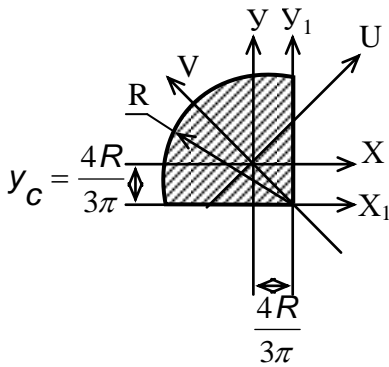


$$F = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2)$$

$$\alpha = \frac{d}{D}$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4)$$

$$i_x = i_y = \frac{D}{4}\sqrt{1 + \alpha^2}$$



$$F = \frac{\pi D^2}{16}$$

$$J_x = J_y = 0,0549R^4$$

$$J_{xy} = 0,0165R^4$$

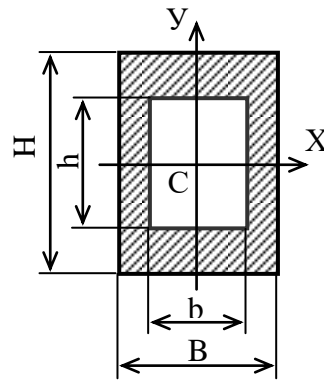
$$J_{x_1} = J_{y_1} = 0,196R^4$$

$$J_v = 0,071R^4$$

$$J_u = 0,0384R^4$$

$$i_v = 0,302R$$

$$i_u = 0,221R$$



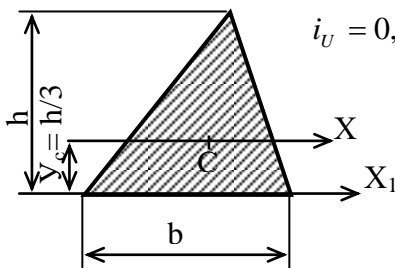
$$F = BH - bh$$

$$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$J_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$$

$$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$$

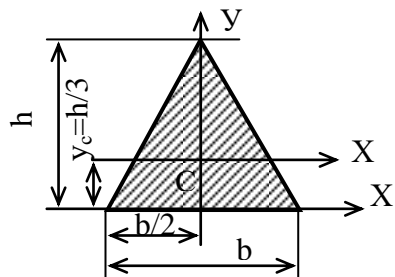
$$i_y = \sqrt{\frac{HB^3 - hb^3}{12(BH - bh)}}$$



$$F = \frac{1}{2}bh^2$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}$$

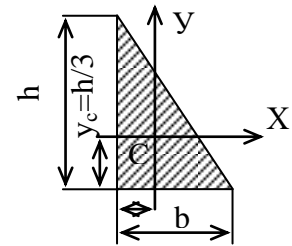
$$J_{x_1} = \frac{bh^3}{12}$$



$$F = \frac{1}{2}bh$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_y = \frac{hb^3}{48}$$



$$F = \frac{1}{2}bh$$

$$J_x = \frac{bh^3}{36}$$

$$J_y = \frac{hb^3}{36}$$

$$J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

Рис.3.4.

Пример 1. Определить для заданного плоского сечения (рис.3.5) положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции и радиусы инерции. $R=5$ см.

Решение.

1. Определение центра тяжести фигуры.

а) Разобьем фигуру на полуокружность и треугольник, проведем центральные оси x_1-u_1 , x_2-u_2 этих фигур параллельные сторонам треугольника.

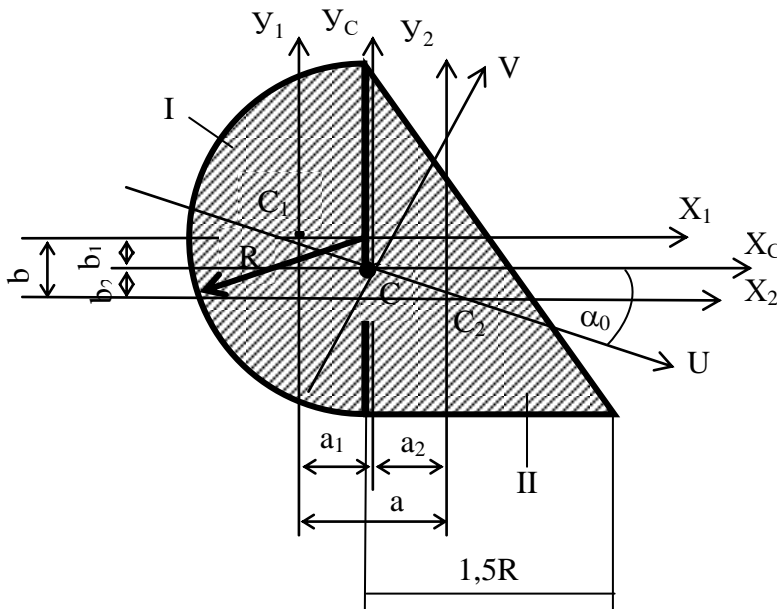


Рис.3.5

б) Проведем вспомогательные оси, относительно которых будем находить смещение центра тяжести всей фигуры. Вспомогательные оси рациональнее совмещать с центральными осями какого-либо из элементов сложной фигуры, т.к. статический момент этого элемента относительно этих осей будет равен нулю. В рассматриваемом примере вспомогательные оси совместим с осями x_1-u_1 (центральные оси полуокружности).

в) Используя зависимости (3.3), определяем центр тяжести фигуры и проводим центральные оси x_c-u_c .

в) Используя зависимости (3.3), определяем центр тяжести фигуры и проводим центральные оси x_c-u_c .

в) Используя зависимости (3.3), определяем центр тяжести фигуры и проводим центральные оси x_c-u_c .

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum F_i \cdot x_{c_i}}{\sum F_i} = \frac{F_1 \cdot x_{c_1} + F_2 \cdot x_{c_2}}{F_1 + F_2} = \frac{F_2 \cdot a}{F_1 + F_2} = \frac{\frac{\pi D^2}{8} \left(\frac{4R}{3\pi} + \frac{1}{3} \cdot 1,5R \right)}{\frac{\pi D^2}{8} + \frac{1}{2} 2R \cdot 1,5R};$$

$$x_c = \frac{39,25(2,12 + 2,5)}{39,25 + 37,5} = 2,36 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{x_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{\sum_{i=1}^n F_i \cdot y_{c_i}}{\sum_{i=1}^n F_i} = \frac{F_1 \cdot y_{c_1} + F_2 \cdot y_{c_2}}{F_1 + F_2} = \frac{F_2 \cdot b}{F_1 + F_2} = \frac{\frac{\pi D^2}{8} \left[- \left(R - \frac{1}{3} 2R \right) \right]}{F_1 + F_2};$$

$$y_c = \frac{-39,25 \cdot \frac{5}{3}}{76,75} = -0,85 \text{ см}.$$

Центр тяжести «С» всей фигуры должен лежать на прямой, соединяющей центры тяжести полуокружности и треугольника.

2. Определяем моменты инерции относительно центральных осей, применяя зависимость (3.7).

$$J_{x_c} = \sum_{i=1}^n J_{x_{ci}} = J_{x_{c1}} + J_{x_{c2}} = (J_{x_1} + F_1 \cdot b_1^2) + (J_{x_2} + F_2 b_2^2);$$

$$b_1 = y_c = 0,85 \text{ см} , b_2 = b - y_c = \frac{5}{3} - 0,85 = 0,82 \text{ см} .$$

$$J_{x_c} = \left(\frac{\pi D^4}{128} + \frac{\pi D^2}{8} \cdot y_c^2 \right) + \left[\frac{1,5R(2R)^3}{36} + \frac{1}{2} 1,5R \cdot 2R \cdot (b - y_c)^2 \right];$$

$$J_{x_c} = \frac{3,14 \cdot 10^4}{128} + \frac{3,14 \cdot 10^2}{8} \cdot 0,85^2 + \frac{1,5 \cdot 5 \cdot 10^3}{36} + \frac{1}{2} 1,5 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 0,82^2 = 507,2 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_c} = \sum_{i=1}^n J_{y_{ci}} = J_{y_{c1}} + J_{y_{c2}} = (J_{y_1} + F_1 \cdot a_1^2) + (J_{y_2} + F_2 \cdot a_2^2);$$

$$a_1 = x_c = 2,36 \text{ см} , a_2 = a - x_c = 4,62 - 2,36 = 2,26 \text{ см};$$

$$J_{y_c} = (0,11R^4 + \frac{\pi D^2}{8} \cdot x_c^2) + \left[\frac{2R(1,5R)^3}{36} + \frac{1}{2} 1,5R \cdot 2R(a - x_c)^2 \right];$$

$$J_{y_c} = 0,11 \cdot 5^4 + \frac{3,14 \cdot 10^2}{8} \cdot 2,36^2 + \frac{10 \cdot 7,5^3}{36} + \frac{1}{2} 1,5 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 2,26^2 = 596,1 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_c y_c} = \sum_{i=1}^n J_{x_{ci} y_{ci}} = J'_{x_{c1} y_{c1}} + J''_{x_{c2} y_{c2}} = (J_{x_1 y_1} + F_1 a_1 \cdot b_1) + (J_{x_2 y_2} + F_2 a_2 \cdot b_2);$$

$$J'_{x_1 y_1} = 0;$$

$$J_{x_c y_c} = \frac{\pi D^2}{8} (-x_c)(y_c) - \frac{(1,5R)^2 (2R)^2}{72} + \frac{1}{2} 1,5R \cdot 2R \cdot (a_2)(-b_2);$$

$$J_{x_c y_c} = -\frac{3,14 \cdot 10^2}{8} 2,36 \cdot 0,85 - \frac{4 \cdot 2,25 \cdot 5^4}{72} - 1,5 \cdot 5^2 \cdot 2,26 \cdot 0,82 = -226,3 \text{ см}^4 .$$

3. Определение положения главных центральных осей и величину главных центральных моментов инерции.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2(-226,3)}{507,2 - 596,1} = -5,09;$$

$$\alpha_0 = -39^{\circ} 26' .$$

Так как $\alpha_0 \leq 0$ ось x_c должна быть повернута до совмещения с главной осью «U» по часовой стрелке $J_{y_c} > J_{x_c}$, следовательно, $J_U = J_{\min}$, $J_V = J_{\max}$.

$$\begin{aligned} J_U &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} = \\ &= \frac{507,2 + 596,1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(507,2 - 596,1)^2 + 4 \cdot 226,3^2} = 321,03 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

$$J_V = \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} = 551,65 + 230,62 = 782,27 \text{ см}^4$$

$$J_{x_c} + J_{y_c} = J_U + J_V; \quad 507,2 + 596,1 = 321,0 + 782,3;$$

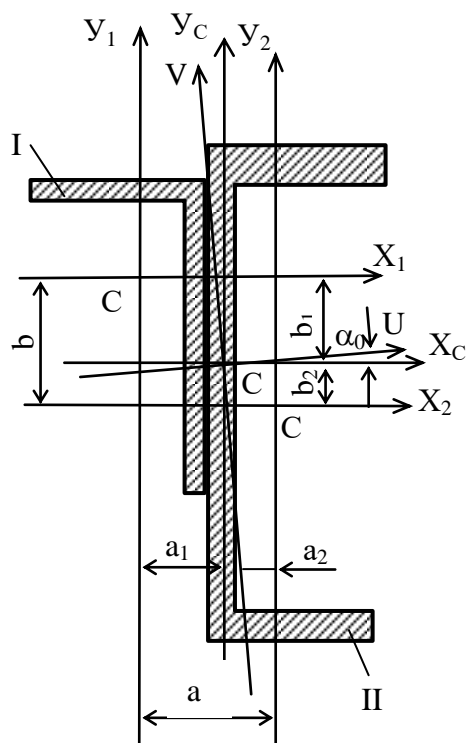
$$1103,3 = 1103,3.$$

4. Определяем главные радиусы инерции:

$$i_U = \sqrt{\frac{J_U}{F}} = \sqrt{\frac{321,03}{76,75}} = 2,04 \text{ см};$$

$$i_V = \sqrt{\frac{J_V}{F}} = \sqrt{\frac{782,27}{76,75}} = 3,19 \text{ см}.$$

Пример 2. Определить для плоского сечения, изображенного на рис.3.6 положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции и радиусы инерции. Швеллер № 30, уголок 125x80x10.



Справочные данные:

└ № 125x80x10

$B=12,5 \text{ см}, b=8 \text{ см},$

$F=19,7 \text{ см}^2, J_x=311,61 \text{ см}^4,$

$J_y=100,47 \text{ см}^4, | | J_{xy}=102,0 \text{ см}^4,$

$x_0=1,92 \text{ см}, y_0=4,14 \text{ см}.$

[№ 30

$h=30 \text{ см}, b=10 \text{ см}, F=40,5 \text{ см}^2,$

$J_x=5810 \text{ см}^4, J_y=327 \text{ см}^4,$

$z_0=2,52 \text{ см}.$

Решение.

1. Выбираем вспомогательные оси, совпадающие с центральными осями (x_2 - y_2) швеллера, определяем центр тяжести фигуры, аналогично предыдущему примеру.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n S_{y_i}}{\sum F_i} = \frac{F_1 \cdot a}{F_1 + F_2} = \frac{19,7(-4,44)}{19,7 + 40,5} = -1,45 \text{ см};$$

$$a = X_0 + Z_0 = 1,92 + 2,52 = 4,44 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n S_{xi}}{\sum F_i} = \frac{F_1 \cdot b}{F_1 + F_2} = \frac{19,7(8,36)}{60,2} = 2,74 \text{ см};$$

$$b = B - y_0 = 12,5 - 4,14 = 8,36 \text{ см}.$$

2. Определяем моменты инерции относительно центральных осей.

$$J_{x_C} = \sum_{i=1}^n J_{x_{Ci}} = J_{x_1} + F_1 \cdot b_1^2 + J_{x_2} + F_2 \cdot b_2^2 =$$

$$= 311,61 + 19,7 \cdot 5,62^2 + 5810 + 40,5 \cdot 2,74^2 = 7047,9 \text{ см}^4;$$

$$b_1 = b - y_C = 8,36 - 2,74 = 5,62 \text{ см};$$

$$b_2 = y_C = 2,74 \text{ см}.$$

$$J_{y_C} = \sum_{i=1}^n J_{y_{Ci}} = J_{y_1} + F_1 \cdot a_1^2 + J_{y_2} + F_2 \cdot a_2^2 =$$

$$= 100,47 + 19,7 \cdot 2,99^2 + 327 + 40,5 \cdot 1,45^2 = 688,74 \text{ см}^4;$$

$$a_1 = a - x_C = 4,44 - 1,45 = 2,99 \text{ см}, \quad a_2 = x_C = 1,45 \text{ см}.$$

$$J_{x_C y_C} = \sum_{i=1}^n J_{x_C y_{Ci}} = J_{x_1 y_1} + F_1 b_1 (-a_1) + J_{x_2 y_2} + F_2 (-b_2) a_2 =$$

$$= -102 - 19,7 \cdot 5,62 \cdot 2,99 - 40,5 \cdot 2,74 \cdot 1,45 = -593,94 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2 y_2} = 0.$$

3. Определяем направление главных центральных осей и величину главных центральных моментов инерции.

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{x_C y_C}}{J_{x_C} - J_{y_C}} = -\frac{2 \cdot (-593,94)}{7047,9 - 688,7} = 0,1868;$$

$$\alpha_0 = 5^\circ 18'.$$

Ось x необходимо повернуть против часовой стрелки на угол α_0 до совмещения с главной осью U .

$$J_U = J_{\max} = \frac{J_x + J_{y_C}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_C} - J_{y_C})^2 + 4J_{x_C y_C}^2} =$$

$$= \frac{7047,9 + 688,7}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(7047,9 - 688,7)^2 + 4 \cdot 593,9^2} = 7103 \text{ см}^4;$$

$$J_V = J_{\min} = \frac{7047,9 + 688,7}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(7047,9 - 688,7)^2 + 4 \cdot 593,9^2} = 633,7 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_C} + J_{y_C} = J_U + J_V; \quad 7047,9 + 688,74 = 7103 + 633,7;$$

$$7737 = 7737.$$

4. Определяем главные радиусы инерции:

$$i_U = \sqrt{\frac{J_U}{F}} = \sqrt{\frac{7103}{60,2}} = 10,86 \text{ см};$$

$$i_V = \sqrt{\frac{J_V}{F}} = \sqrt{\frac{633,7}{60,2}} = 3,24 \text{ см}.$$

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ № 2

Геометрические характеристики плоских сечений

Для заданного плоского сечения определить положение главных центральных осей и вычислить основные геометрические характеристики.

Типы сечений и числовые данные выбираются в соответствии с шифром по рис. 3.7 и таблице 3.1.

Сведения о геометрических характеристиках прокатных профилей даны в ГОСТ: 8239-72 (двутавры), 8240-72 (швеллеры), 8509-86 (уголки равнополочные), 8510-86 (уголки неравнополочные).

Таблица 3.1

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я
	Тип сечения	№ швеллера или двутавра	Размеры равнополочного уголка	b (см)	R (см)	Размеры неравнополочного уголка
1	1	12	70x70x8	10	6	75x60x6
2	2	14	80x80x8	12	8	80x50x8
3	3	16	90x90x9	14	10	90x56x8
4	4	18	100x100x10	11	12	100x63x10
5	5	20	110x110x8	13	14	110x70x8
6	6	22	120x120x12	15	7	125x80x10
7	7	24	140x140x12	16	9	140x90x10
8	8	24 ^a	150x150x10	17	11	160x100x12
9	9	30	160x160x14	18	13	180x110x12
0	10	36	180x180x12	20	15	200x125x14

Содержание и порядок выполнения работы

1. Начертить сечение в масштабе, указать размеры.
2. Определить положение центра тяжести сечения.
3. Вычислить моменты инерции относительно центральных осей.
4. Определить положение главных центральных осей и величину главных центральных моментов инерции.
5. Вычислить главные радиусы инерции.

Вопросы для самопроверки:

1. Как определяются осевой, центробежный и полярный моменты инерции?
2. Основные свойства статического момента площади и центробежного момента.
3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей.
4. Какие оси называются центральными, главными и главными центральными?
5. Как изменяются моменты инерции при повороте осей?
6. Что такое радиусы инерции?

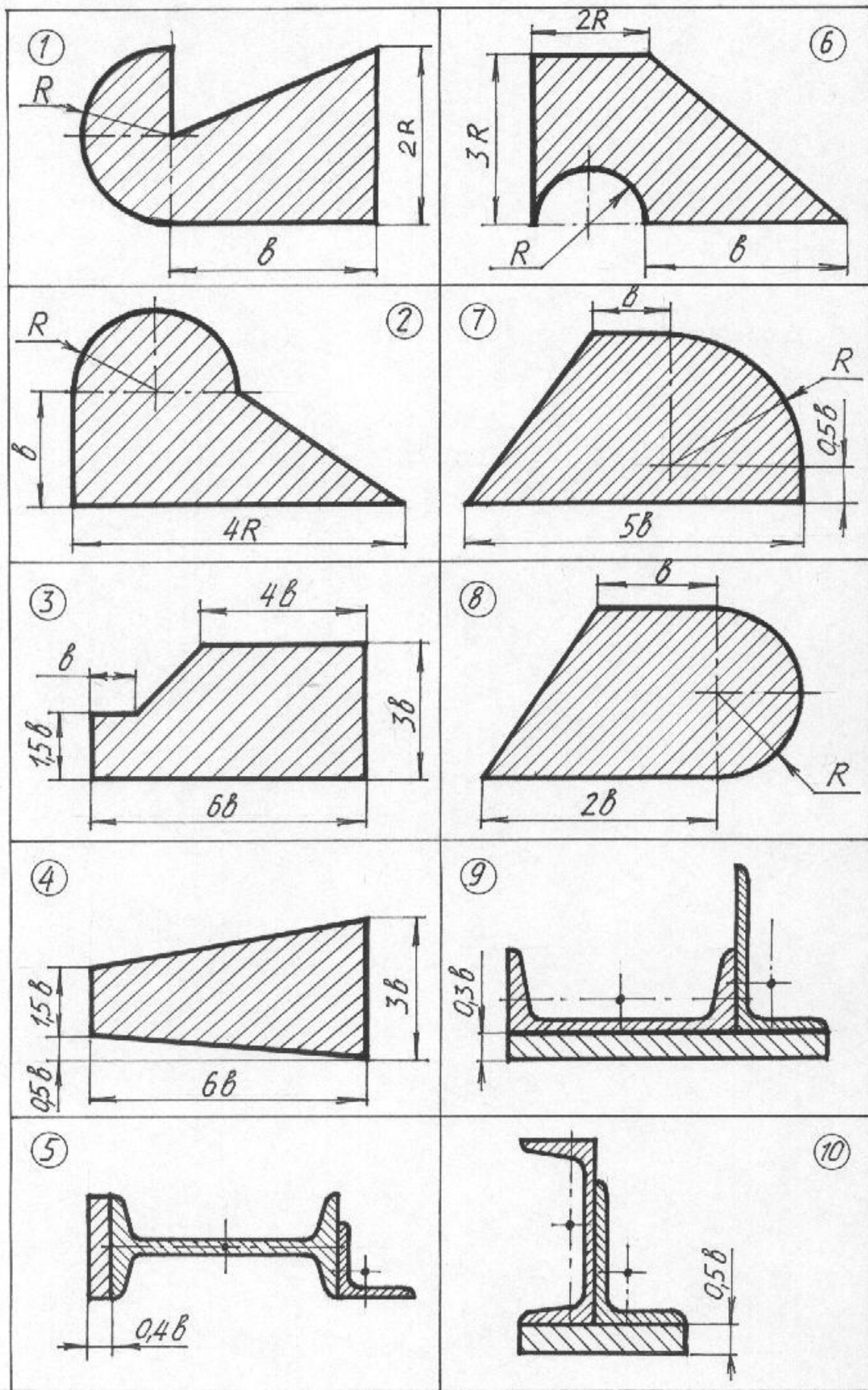


Рис. 3.7.

ГЛАВА IV

ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО И ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

4.1. Напряженное состояние в точке и его виды

Напряженным состоянием в точке называется совокупность напряжений (нормальных и касательных), действующих по всевозможным площадкам, проведенным через эту точку.

Если в окрестности исследуемой точки шестью сечениями выделить элементарный объем в виде прямоугольного параллелепипеда, то напряжения на гранях этого параллелепипеда будут определять напряженное состояние в точке.

При изменении ориентации граней выделенного элементарного параллелепипеда то напряжения на них также будут изменяться. В теории упругости доказывается, что можно найти такую ориентацию элемента, при которой касательные напряжения на гранях будут равны нулю. Площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, называются главными площадками, а нормальные напряжения на них – главными напряжениями. Обозначаются главные напряжения буквами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, при этом индексы следует расставлять так, чтобы выполнялось неравенство $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

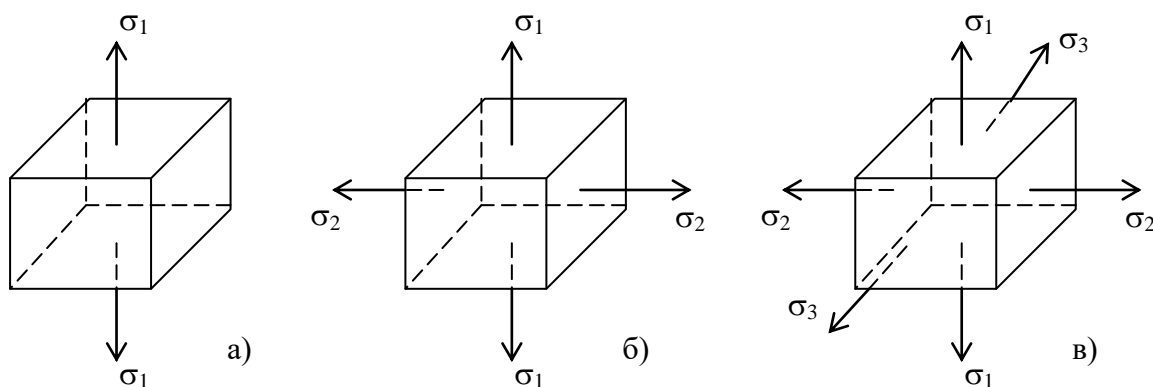


Рис.4.1

Можно выделить три вида напряженного состояния в точке. Напряженное состояние, в котором два главных напряжения равны нулю, называется одноосным или линейным (рис.4.1а). В случае равенства нулю только одного главного напряжения (два других отличны от нуля) оно носит название двухосного или плоского (рис.4.1б). Если все три главных напряжения не равны нулю, то напряженное состояние называется трехосным или объемным (рис.4.1в).

4.2. Исследование плоского напряженного состояния

При исследовании напряженного состояния элементов конструкции часто приходится иметь дело с плоским напряженным состоянием. Например, оно имеет место при кручении, поперечном изгибе и сложном сопротивлении.

Линейное напряженное состояние представляет собой частный случай плоского, поэтому отдельно не рассматривается.

При плоском напряженном состоянии две параллельные грани параллелепипеда свободны от напряжений. Совместим их с плоскостью чертежа и рассмотрим площадки, перпендикулярные ненагруженным граням (рис.4.2).

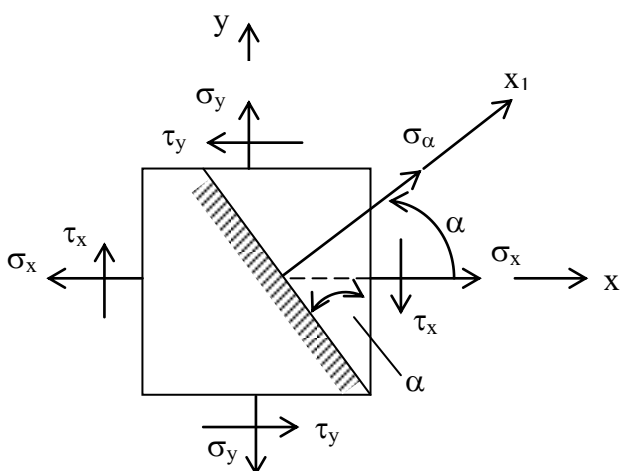


Рис.4.2

Нормальное напряжение обозначается буквой σ с индексом, соответствующим оси, перпендикулярной к рассматриваемой площадке; касательное напряжение обозначается буквой τ с индексом, также соответствующим оси, перпендикулярной к площадке.

Нормальное растягивающее напряжение σ будем считать положительным, а сжимающее – отрицательным. Касательное напряжение принимается положительным, если его для совмещения с направлением

внешней нормали к площадке необходимо повернуть на 90° против хода часовой стрелки, обратное направление касательного напряжения считается отрицательным.

Угол α между осями x и x_1 считается положительным (рис.4.2), если внешнюю нормаль к площадке, по которой действует напряжение σ_x , для совмещения с нормалью к площадке, где действует напряжение σ_{x_1} следует повернуть против часовой стрелки.

Между касательными напряжениями τ_x и τ_y , действующими на двух взаимно перпендикулярных площадках, имеется однозначная связь, выражаемая законом парности касательных напряжений. В соответствии с этим законом касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам

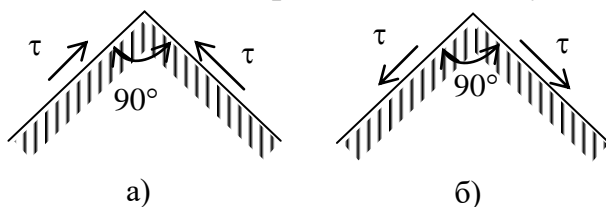


Рис.4.3

равны по абсолютной величине и обратны по знаку.

$$\tau_y = -\tau_x \quad (4.1)$$

Из закона парности касательных напряжений следует, что по двум взаимно перпендикулярным площадкам касательные напряжения направлены либо к линии пересечения этих площадок (рис.4.3а), либо от нее (рис.4.3б).

При известных нормальных и касательных напряжениях на двух взаимно-перпендикулярных площадках напряжения на произвольной наклонной площадке с нормалью x_1 (рис.4.2) определяются по следующим соотношениям:

$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_x \sin 2\alpha \quad (4.2)$$

$$\tau_{x_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \quad (4.3)$$

Если вместо угла α в уравнение 4.2 подставить угол $\beta = \alpha + 90^\circ$, то получим выражение для напряжения σ_{y_1} на площадке перпендикулярной к произвольной наклонной площадке (рис.4.4) с нормалью y_1 :

$$\sigma_{y_1} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha + \tau_x \sin 2\alpha \quad (4.4)$$

$$\tau_{y_1} = -\tau_{x_1}$$

Используя тригонометрические соотношения $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$; $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, можно записать формулы 4.2 и 4.4 в иной форме:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha; \quad (4.5)$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha \quad (4.6)$$

Суммируя выражения 4.5 и 4.6 получаем соотношение:

$$\sigma_{x_1} + \sigma_{y_1} = \sigma_x + \sigma_y, \quad (4.7)$$

которое показывает, что сумма нормальных напряжений на двух взаимно перпендикулярных площадках постоянна, откуда следует, что если с изменением угла α , нормальное напряжение на одной площадке растёт, то на другой убывает.

4.3. Главные площадки. Главные напряжения

Главными называются площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения. Положение главных

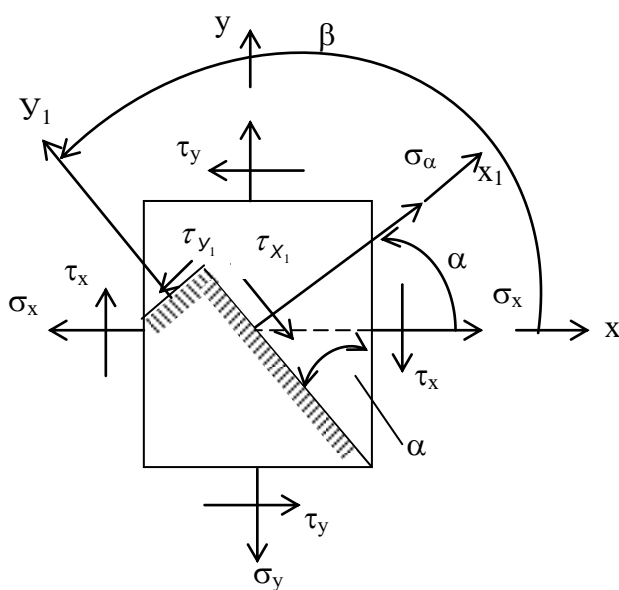


Рис.4.4

площадок определяется по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad (4.8)$$

Нормальные напряжения, действующие на главных площадках, называются главными напряжениями. Главные напряжения являются экстремальными, т.е. одно главное напряжение имеет наибольшее, другое наименьшее из

возможных значений нормальных напряжений на множестве площадок, проходящих через исследуемую точку.

Определяются главные напряжения по формулам 4.5 и 4.6, где вместо угла α подставляется угол наклона главных площадок α_0 .

Вместо формул 4.5 и 4.6 главные напряжения могут определяться по формуле:

$$\sigma_{\text{гл}}^{I,II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \quad (4.9)$$

Знаки в формуле 4.9 расставляются таким образом, чтобы удовлетворялись условия: если $\sigma_x > \sigma_y$, то $\sigma_{\text{гл}}^I > \sigma_{\text{гл}}^{II}$ и наоборот.

При изучении плоского напряженного состояния в точке обычно рассматриваются две задачи:

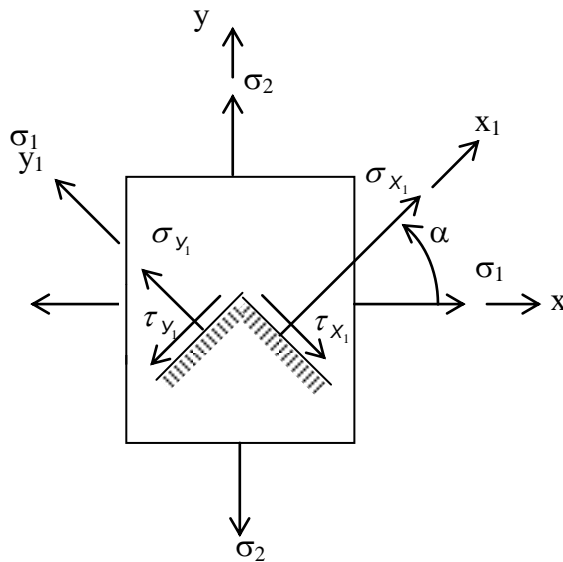


Рис.4.5

а) по известным напряжениям на главных площадках требуется определить нормальные и касательные напряжения на произвольных площадках. В этом случае для определения напряжений пользуются формулами 4.3, 4.5 и 4.6, в которых вместо σ_x и σ_y подставляются главные напряжения. Например, известны главные напряжения, действующие по граням элемента σ_1 и σ_2 (рис.4.5). Требуется найти нормальные и касательные напряжения на двух наклонных площадках:

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha;$$

$$(4.10)$$

$$\tau_{x_1} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha; \quad \tau_{y_1} = -\tau_{x_1}.$$

$$(4.11)$$

б) по известным нормальным и касательным напряжениям на произвольных взаимно перпендикулярных площадках необходимо определить главные напряжения и положение главных площа-

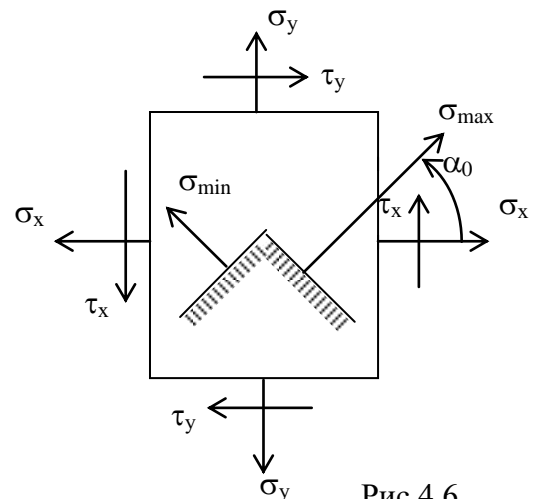


Рис.4.6

док. Задача решается с помощью формул 4.8 и 4.9. Пример задачи дан на рис.4.6. Полагаем, что в задачах $\sigma_x > \sigma_y$.

Наибольшие и наименьшие касательные напряжения действуют на площадках, расположенных под углом 45° к главным площадкам. Они вычисляются по формуле:

$$\tau_{max/min} = \pm \frac{(\sigma_{max} - \sigma_{min})}{2}. \quad (4.12)$$

Если по граням элемента действуют не главные, а нормальные и касательные напряжения, то экстремальные касательные напряжения определяются по формуле:

$$\tau_{max/min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \quad (4.13)$$

На площадках с максимальным касательным напряжением нормальные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}. \quad (4.14)$$

4.4. Объемное напряженное состояние

4.4.1. Определение максимальных касательных напряжений

При объемном напряженном состоянии по граням элементарного параллелепипеда действуют все три главных напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Рассмотрим вычисление максимальных касательных напряжений, возникающих на площадках, параллельных действию главных напряжений. Так как на площадке, параллельной главному напряжению σ_3 (рис.4.7), нормальные и касательные напряжения целиком определяются величинами σ_1 и σ_2 , максимальное касательное напряжение согласно формуле 4.12 будет равно

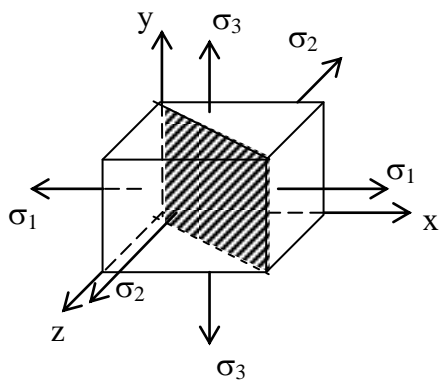


Рис.4.7

$$\tau_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (4.15)$$

На площадке, параллельной напряжению σ_2

$$\tau_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \quad (4.16)$$

На площадке, параллельной главному напряжению σ_1

$$\tau_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}. \quad (4.17)$$

Наибольшее касательное напряжение действует по площадке, перпендикулярной второй главной площадке, наклоненной к двум другим главным площадкам под углом 45° , и равно $\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

4.4.2. Деформации при объемном напряженном состоянии

Рассмотрим деформацию бесконечно малого элемента с размерами ребер dx, dy, dz (рис.4.8). По граням параллелепипеда действуют главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Вследствие деформации длины ребер элемента становятся равными $dx+\Delta dx, dy+\Delta dy, dz+\Delta dz$.

Величины $\varepsilon_1 = \frac{\Delta dx}{dx}, \varepsilon_2 = \frac{\Delta dy}{dy}, \varepsilon_3 = \frac{\Delta dz}{dz}$ называются относительными

удлинениями в направлении главных напряжений или главными линейными деформациями.

Зависимость между линейными деформациями и главными напряжениями в общем случае трехосного напряженного состояния выражается обобщенным законом Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

(4.18)

Из формул 4.18 легко можно получить закон Гука для плоского напряженного состояния, как частного случая объемно-напряженного состояния.

Объемная деформация. При упругой деформации тела изменяется его объем. Относительное изменение объема определяется по формуле:

$$\varepsilon_v = \frac{V_1 - V_0}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

(4.19)

Здесь V_0 – объем элемента до деформации, V_1 – объем элемента в деформированном состоянии. Выразив главные удлинения через главные напряжения при помощи формул 4.18, получим:

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

(4.20)

Потенциальная энергия деформации

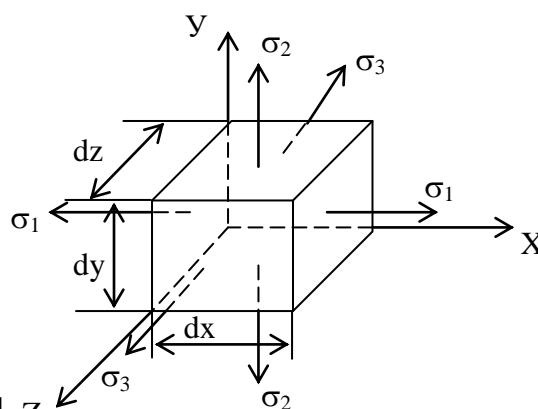


Рис.4.8

Потенциальной энергией деформации называется энергия, которая накапливается в теле при его деформации. В упругой области она численно равна работе внешних сил, затраченной на деформацию тела. Энергия, отнесенная к единице объема, называется удельной потенциальной энергией деформации.

При простом растяжении $u = \frac{\sigma \varepsilon}{2}$ (2.21).

Обобщая эту формулу на случай объемного напряженного состояния, получим выражение для полной удельной потенциальной энергии:

$$u = \frac{1}{2} \sigma_1 \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \sigma_3 \varepsilon_3.$$

При подстановке выражений $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ из формул 4.18 получим:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)].$$

(4.21)

При деформации элемента изменяется как его объем, так и форма. В соответствии с этим можно считать, что полная удельная потенциальная энергия деформации состоит из удельной потенциальной энергии изменения объема $u_{об}$ и удельной потенциальной энергии изменения формы $u_{ф}$:

$$u = u_{об} + u_{ф} \quad . \quad (4.22)$$

Удельная потенциальная энергия изменения объема определяется по формуле:

$$u_{об} = \frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \quad (4.23)$$

Формула для определения удельной потенциальной энергии изменения формы имеет вид:

$$u_{ф} = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (4.24)$$

4.5. Гипотезы прочности

В зависимости от условий нагружения материал конструкции может находиться в различных механических состояниях. При небольших внешних силах возникают только упругие деформации (упругое состояние материала). При увеличении нагрузки на конструкцию обнаруживаются заметные остаточные деформации и материал находится в пластическом состоянии. Дальнейший рост нагрузки приводит к образованию местных трещин и наступает состояние разрушения. Причем, в различных напряженных состояниях свойства материала проявляются по разному. Например, чугун, имеющий хрупкий характер разрушения при линейном нагружении, под действием большого всестороннего давления приобретает свойства пластичности.

Таким образом, механическое состояние материала в точке зависит в первую очередь от напряженного состояния в этой точке.

Введем понятие предельного напряженного состояния. Предельным называется напряженное состояние, при котором происходит качественное изменение механического состояния материала.

Число показывающее, во сколько раз следует увеличить все компоненты напряженного состояния, чтобы оно стало предельным, называется коэффициентом запаса прочности.

Экспериментальное определение совокупности предельных состояний в общем случае связано с большими трудностями. Это заставляет искать теоретические пути для оценки опасного напряженного состояния. Такие пути устанавливают так называемые теории прочности.

Основной задачей теорий прочности состоит в установлении условий начала текучести или разрушения материала при сложном напряженном состоянии на основании экспериментальных данных, полученных для того же материала при испытаниях на растяжение, сжатие или чистый сдвиг. Иначе говоря, задача состоит в установлении условий равноопасности различных напряженных состояний.

Напряженные состояния называются равноопасными, если для достижения предельных напряженных состояний их компоненты надо увеличить в одинаковое число раз, т.е. для них равны коэффициенты запаса.

При построении теорий предельного состояния принято исследуемое напряженное состояние сравнивать с одноосным растяжением как наиболее типичным и легко осуществимым состоянием.

Напряжение в образце, подвергнутом осевому растяжению и находящемся в равноопасном с рассматриваемым элементом состоянии, называется эквивалентным напряжением и обозначается символом $\sigma_{\text{экв}}$. Если $\sigma_{\text{экв}}$ достигает предела текучести или предела прочности при одноосном растяжении, то в элементе находящемся в сложном напряженном состоянии также начнется течение или разрушение материала. Если же $\sigma_{\text{экв}}$ будет меньше предельного напряжения $\sigma_{\text{пр}}$ при одноосном растяжении, то рассматриваемый элемент и образец будут обладать одинаковым запасом прочности $n = \frac{\sigma_{\text{пр}}}{\sigma_{\text{экв}}}$.

В этом случае условие прочности имеет вид: $\sigma_{\text{экв}} \leq [\sigma]$, или $n \geq [n]$.

Ниже представлены пять теорий прочности, получившие наибольшее распространение в технике.

Первая теория прочности (Теория наибольших нормальных напряжений)

Эта теория связывает разрушение материала с достижением наибольшим нормальным напряжением предельного значения.

Согласно данной теории напряженные состояния будут равноопасными, если их наибольшие нормальные напряжения одинаковы.

Так как при сложном напряженном состоянии наибольшим нормальным напряжением является σ_1 , условие прочности будет иметь вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^I = \sigma_1 \leq [\sigma]. \quad (4.25)$$

Теория не получила подтверждения в целом ряде экспериментов. В ней не учитывается возможность появления пластических деформаций, поэтому она неприменима для пластичных материалов и для напряженных состояний, приводящих к пластическим деформациям.

Теория иногда применяется при расчете конструкций из очень хрупких материалов (бетон, камень, кирпич).

Вторая теория прочности (Теория наибольших относительных удлинений)

В этой теории в качестве критерия разрушения принято наибольшее относительное удлинение.

Теория утверждает, что напряженные состояния будут равноопасны, если для них равны наибольшие относительные удлинения.

Наибольшее относительное удлинение при трехосном напряженном состоянии согласно обобщенному закону Гука возникает в направлении первого главного напряжения:

$$\varepsilon_{\text{max}} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

При эквивалентном одноосном напряженном состоянии $\varepsilon_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{экв}}}{E}$. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (4.26)$$

Эта теория прочности так же, как и первая, применима к материалам в хрупком состоянии (высокопрочные инструментальные стали, чугун).

Третья теория прочности (Теория наибольших касательных напряжений)

Согласно этой теории, напряженные состояния будут равноопасными, если их максимальные касательные напряжения равны.

Ввиду того, что при сложном напряженном состоянии элемента $\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$, а при одноосном растяжении образца $\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{экв}}}{2}$, условие прочности приобретает вид:

$$\sigma_{\text{экв}}^{III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (4.27)$$

Третья теория дает хорошие результаты для пластичных материалов с одинаковым пределом текучести при растяжении и сжатии. Теория не применима для хрупких материалов или для напряженных состояний, приводящих к хрупкому разрушению.

Для материалов, неодинаково работающих на растяжение и сжатие, третья теория опытами не подтверждается.

Существенным недостатком теории является то, что в ней не учитывается влияние на прочность материала второго главного напряжения σ_2 .

*Четвертая теория прочности
(Теория удельной потенциальной энергии изменения формы).*

Согласно этой теории, напряженные состояния равноопасны, если для них равны удельные потенциальные энергии изменения формы.

При сложном напряженном состоянии удельная потенциальная энергия изменения формы определяется по выражению:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2].$$

При одноосном растяжении образца, когда $\sigma_1 = \sigma_{эКВ}$, а $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$,

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma_{эКВ}^2.$$

Отсюда условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{эКВ}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (4.28)$$

Теория дает хорошие результаты для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие. Преимуществом четвертой теории перед третьей является то, что в ней учитывается влияние всех трех главных напряжений.

Теория прочности Мора

Данная теория прочности основана на результатах испытания при двух видах нагружения – растяжении и сжатии. Предполагается, что главное напряжение σ_2 не влияет на механическое состояние материала, а ответственными за наступление предельного состояния являются напряжения σ_1 и σ_3 .

Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{эКВ}^V = \sigma_1 - \vartheta \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (4.29)$$

Здесь коэффициент неравнопрочности $\vartheta = \frac{\sigma_{нр}^P}{\sigma_{нр}^C}$.

Применяется данная теория прочности для материалов, по разному сопротивляющихся растяжению и сжатию.

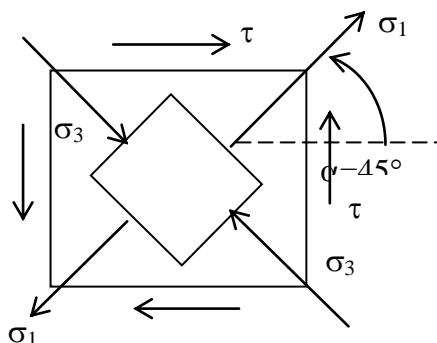


Рис.4.9

4.5. Чистый сдвиг и его особенности

Чистым сдвигом называется такой случай плоского напряженного состояния, когда по двум взаимно перпендикулярным площадкам действуют только касательные напряжения (рис.4.9).

Главные площадки наклонены к граням элемента под углом 45° . По главным площадкам действуют главные напряжения $\sigma_1 = \tau$ и $\sigma_3 = -\tau$; $\sigma_2 = 0$.

Взаимное перемещение двух параллельных площадок, отстоящих друг от друга на расстоянии a (рис.4.10), называется абсолютным сдвигом ΔS , а отношение $\gamma = \frac{\Delta S}{a}$ - относительным сдвигом или угловой деформацией. Экспериментально установлено, что между τ и γ существует линейная зависимость:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (4.30)$$

которая отражает закон Гука при сдвиге, где G - модуль сдвига.

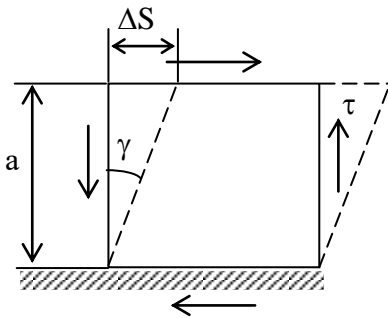


Рис.4.10

Между тремя константами материала E , G и μ существует зависимость:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}. \quad (4.31)$$

По разным теориям прочности получим различные соотношения между допускаемыми нормальными и касательными напряжениями.

По третьей теории прочности $[\tau] = 0,5[\sigma]$, по теории энергии формоизменения $[\tau] = 0,58[\sigma]$, по теории прочности Мора $[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \vartheta}$.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ №4

Анализ плоского напряженного состояния и оценка прочности материала в опасной точке детали.

Произвести анализ плоского напряженного состояния и оценить прочность материала в опасной точке детали по заданным напряжениям на двух взаимно-перпендикулярных наклонных площадках. Общие данные: для пластичного материала принять предел текучести $\sigma_T = 300$ МПа, для хрупкого материала принять предел прочности на растяжение $\sigma_B^P = 180$ МПа, предел прочности на сжатие $\sigma_B^C = 690$ МПа.

Расчетная схема и числовые данные выбираются в соответствии с шифром из рис. 4.11 и таблицы 4.1.

Таблица 4.1

Цифра шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я
	схема	$ \sigma_x $, МПа	$ \sigma_y $, МПа	$ \tau_x $, МПа	μ	α°
1	1	55	30	25	0,25	20
2	2	60	45	30	0,26	25
3	3	75	50	45	0,27	30
4	4	80	65	50	0,28	35
5	5	95	70	65	0,30	40
6	6	100	85	20	0,32	45
7	7	65	75	35	0,30	50
8	8	75	65	40	0,28	55
9	9	80	55	50	0,26	60
0	10	95	40	65	0,29	65

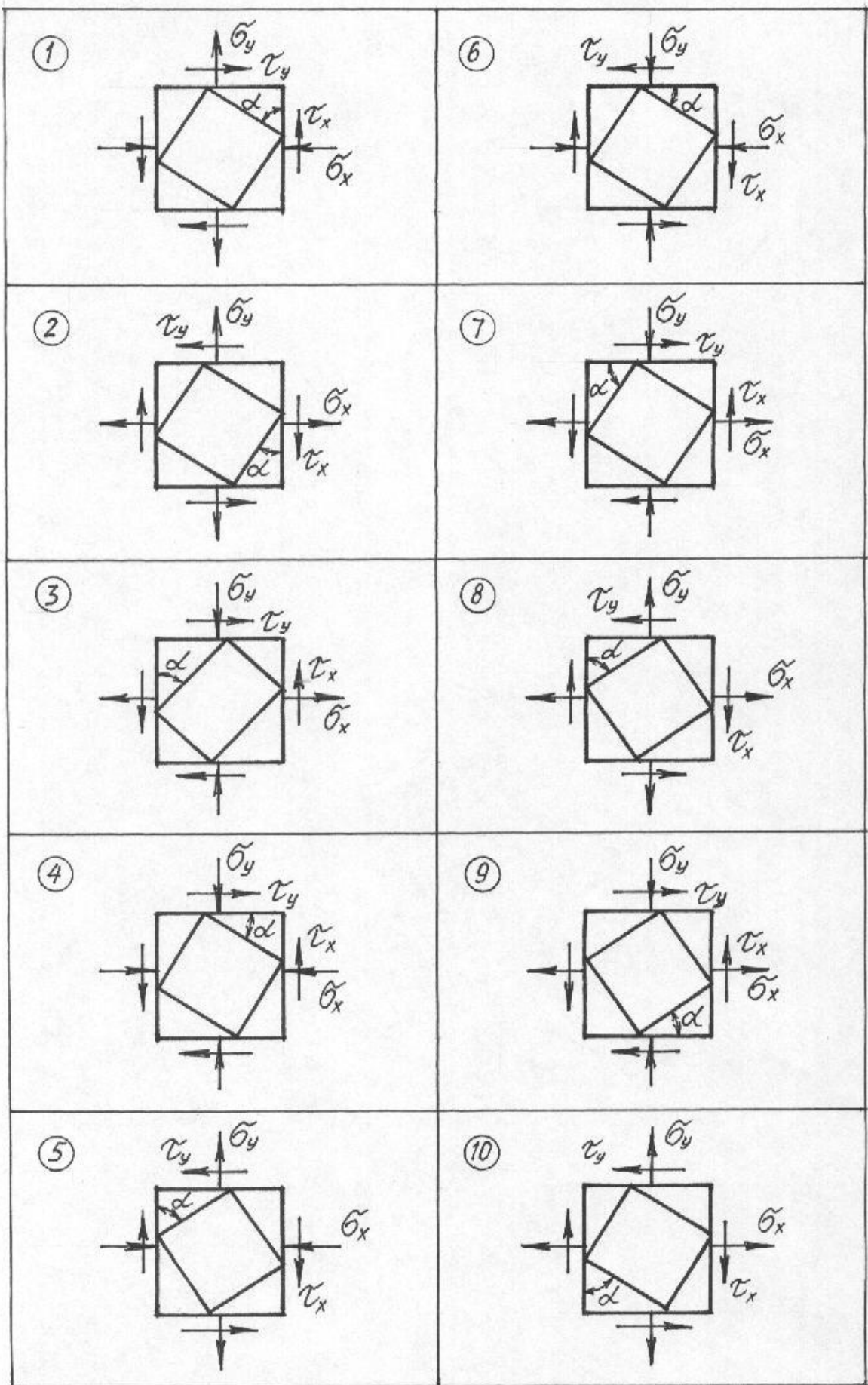


Рис. 4.11

Содержание и порядок выполнения

1. Вычертить схему элемента с указанием численных значений заданных величин.
2. Присвоить, согласуясь со схемой, знаки напряжениям и углам.
3. Определить положение главных площадок и значения главных напряжений.
4. Определить напряжения на взаимно перпендикулярных площадках, повернутых на угол α относительно исходных площадок.
5. Вычислить наибольшие касательные напряжения.
6. Определить главные деформации.
7. Вычислить относительное изменение объема.
8. Вычислить эквивалентные напряжения и определить коэффициенты запаса прочности: а) для пластичного материала по теориям прочности наибольших касательных напряжений и потенциальной энергии изменения формы; б) для хрупкого материала по теории наибольших линейных деформаций и теории прочности Мора.

Пример.

В опасной точке детали, выполненной из пластичного материала с пределом текучести $\sigma_T=300\text{МПа}$, произвести анализ плоского напряженного состояния, заданного напряжениями на двух взаимно перпендикулярных площадках, и оценить прочность материала в данной точке (рис.4.12).

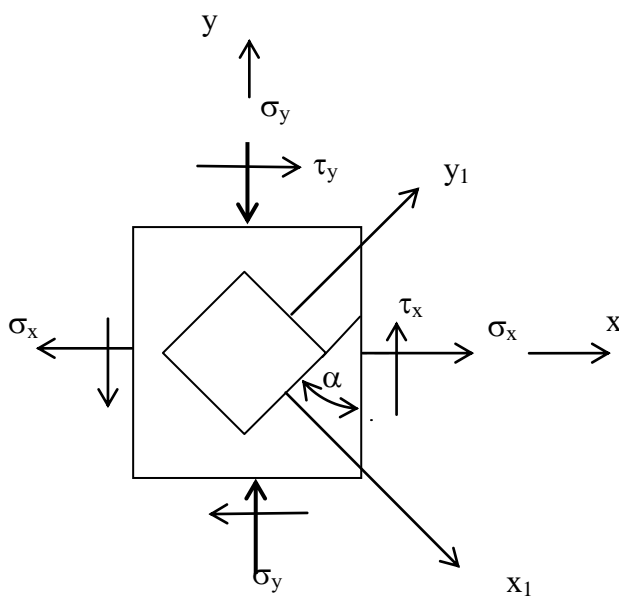


Рис.4.12

Исходные данные:
 $|\sigma_x|=90\text{ МПа}$, $|\sigma_y|=30\text{ МПа}$,
 $|\tau_x|=40\text{ МПа}$, $|\alpha|=25^\circ$, $E=2\cdot 10^5\text{ МПа}$.

Исходные данные:

$|\sigma_x|=90\text{ МПа}$, $|\sigma_y|=30\text{ МПа}$,
 $|\tau_x|=40\text{ МПа}$, $|\alpha|=25^\circ$, $E=2\cdot 10^5\text{ МПа}$.

Решение.

1. Согласно принятым правилам присваиваем заданным напряжениям и углу α следующие знаки: $\sigma_x=90\text{ МПа}$, $\sigma_y=-30\text{ МПа}$, $\tau_x=-40\text{ МПа}$, $\alpha=-25^\circ$.
2. Определяем положения главных площадок:

$$\operatorname{tg}2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{2(-40)}{90 - (-30)} = 0,667 ;$$

$$2\alpha_0 = 33,7^\circ, \quad \alpha_0 = 16,85^\circ.$$

3. Находим величины главных напряжений:

$$\sigma_{2,1}^{I,II} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2} \right] = \frac{1}{2} \left[(90 - 30) \pm \sqrt{(90 + 30)^2 + 4 \cdot (-40)^2} \right] = 30 \pm 72$$

$$\sigma_1 = 102\text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -42\text{ МПа}.$$

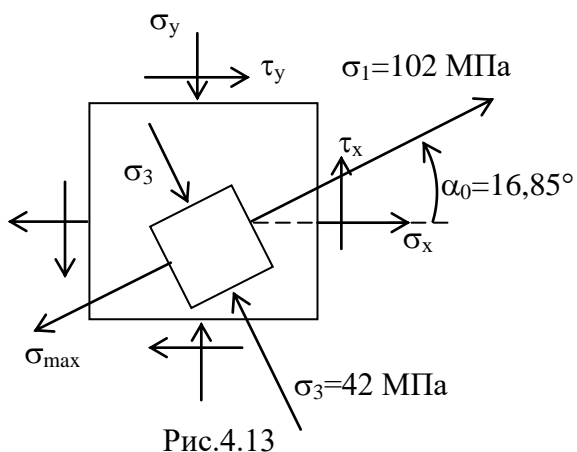


Рис.4.13

Положение главных площадок и действующие на них главные напряжения показаны на рис.4.13. Для этого отложим от нормали к вертикальной площадке против часовой стрелки угол $\alpha_0=16,85^\circ$, получим направление большего по величине главного напряжения $\sigma_1=102\text{МПа}$, (так как $\sigma_x>\sigma_y$, то угол α_0 определяет положение главной площадки, где действует σ_{\max}). По перпендикулярной ей главной площадке действует напряжение

σ_3 .

4. Определение напряжений на взаимно перпендикулярных площадках повернутых относительно исходных на угол $\alpha=-25^\circ$.

$$\sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha = \frac{90 - 30}{2} + \frac{90 - (-30)}{2} \cos(-50^\circ) - (-40) \sin(-50^\circ) = 30 + 60 \cdot 0,643 - 30,64 = 30 + 38,56 - 30,64 = 37,9 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_x \sin 2\alpha = \frac{90 - 30}{2} - \frac{90 - (-30)}{2} \cos(-50^\circ) + (-40) \sin(-50^\circ) = 30 - 60 \cdot 0,643 + 30,64 = 22,1 \text{ МПа}$$

$$\tau_{x_1} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha = \frac{90 - (-30)}{2} \sin(-50^\circ) + (-40) \cos(-50^\circ) = 60 \cdot (-0,766) - 40 \cdot 0,643 = -46 - 25,7 = -71,7 \text{ МПа}$$

Полученные результаты нанесем на исходный элемент (рис.4.11).

5. Вычисление наибольших касательных напряжений.

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \pm \frac{102 - (-42)}{2} = \pm 72 \text{ МПа}$$

6. Определение главных деформаций.

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [102 - 0,25 \cdot (-42)] = 56,25 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [0 - 0,25 \cdot (-42 + 102)] = -7,5 \cdot 10^{-5}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] = \frac{1}{2 \cdot 10^5} [-42 - 0,25 \cdot 102] = -33,75 \cdot 10^{-5}$$

7. Вычисление относительного изменения объема.

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 56,25 \cdot 10^{-5} - 7,5 \cdot 10^{-5} - 33,75 \cdot 10^{-5} = 15 \cdot 10^{-5}$$

8. Вычисление эквивалентного напряжения по четвертой теории прочности.

$$\sigma_{\text{экв}}^{IV} = \sqrt{[\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2] / 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{102^2 + (-42)^2 + (102 + 42)^2} = 129 \text{ МПа}$$

9. Определение коэффициента запаса прочности.

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{экв}^{IV}} = \frac{300}{129} = 2,3 > [n] = 1,5$$

Прочность детали обеспечена.

Вопросы для самопроверки:

1. Какие существуют виды напряженного состояния? Дайте их определение.
2. Какие правила знаков для нормальных и касательных напряжений?
3. Что называется главными площадками, главными напряжениями. Как они определяются?
4. Как записывается обобщенный закон Гука?
5. Как определяется относительное изменение объема?
6. Как вычисляется удельная потенциальная энергия деформации? Составные части полной деформации.
7. Понятия коэффициента запаса прочности, эквивалентного напряжения, равноопасности напряженных состояний.
8. Теории прочности, применяемые в расчетах на прочность для хрупкого материала, для пластичного материала.

ГЛАВА V КРУЧЕНИЕ

5.1. Понятие о крутящем моменте, внешних нагрузках, вызывающих кручение

Под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает единственный силовой фактор – крутящий момент M_k . Стержни, работающие на кручение, называют валами.

Кручение возникает под действием внешних моментов (пар сил), действующих в плоскостях, перпендикулярных продольной оси вала. Внешние моменты передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес, турбин и т.п.

Часто в технических задачах известны мощность, передаваемая валом, и число оборотов вала. По этим данным может быть вычислен скручивающий внешний момент:

$$M = \frac{N}{\omega} [H \cdot m], \text{ где } \omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (5.1)$$

$$\text{или } M = 9,736 \frac{N}{n} [H \cdot m]. \quad (5.2)$$

где N – мощность выражена в ваттах, n (об/мин).

5.2. Внутренние силовые факторы, эпюра крутящих моментов

Для определения крутящих моментов, возникающих в поперечных сечениях вала под действием внешних скручивающих моментов, применяют метод сечений.

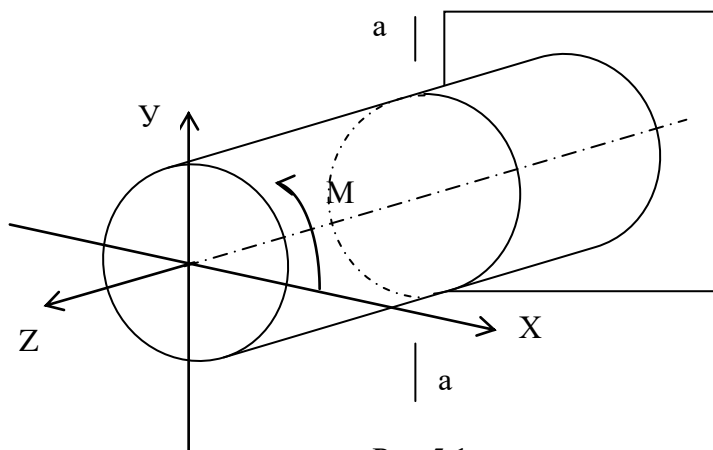


Рис.5.1

Примем следующее правило знаков при анализе крутящих моментов в сечении: крутящий момент в сечении а-а будем считать положительным, если при взгляде со стороны внешней нормали к сечению скручивающий момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке. На рис.5.1 изображен вал, заземленный одним концом и нагруженный на свободном

конце внешним моментом M , который вращает отсеченную часть по часовой стрелке.

Следовательно, согласно принятому правилу знаков, крутящий момент M_k в сечении а-а будет положительным.

При действии на отсеченную часть нескольких внешних моментов, крутящий момент в сечении находится как алгебраическая сумма внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения.

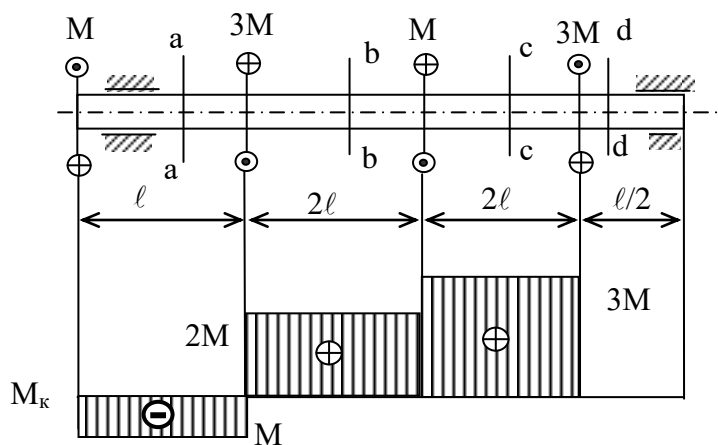
Для того чтобы судить о характере распределения крутящих моментов по длине вала, строят эпюру этих силовых факторов.

Для упрощения внешние моменты будем условно обозначать в виде двух кружков, соединенных линией. Кружок с точкой обозначает силу, направленную на наблюдателя, с крестиком – от наблюдателя (Рис.5.2а).

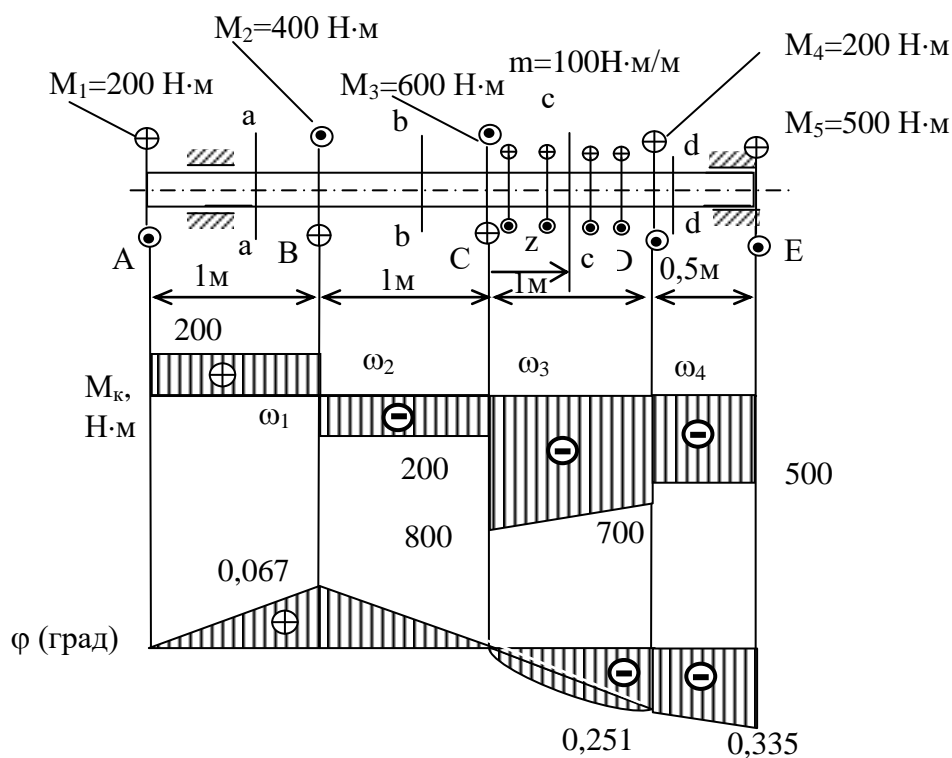
Поясним построение эпюры крутящих моментов на следующем примере: рассмотрим вал АЕ (рис.5.2б), опирающийся на подшипники и нагруженный в сечениях А, В, С, D, E сосредоточенными крутящими моментами, а на участке CD – распределенным крутящим моментом (m). Вал под действием указанных моментов находится в равновесии.

Проведем сечение а-а на участке АВ. Из условия равновесия левой от сечения части получаем $M_k = 200$ Н·м.

В сечении в-в на участке ВС $M_k = 200 - 400 = -200$ Н·м.



а)



б)

Рис.5.2

В сечении с-с на участке CD $M_k = 200 - 400 - 600 + 100 \cdot z$, $0 \leq z \leq 1$ м.

При $z=0$ $M_k = -800$ Н·м, при $z=1$ м $M_k = -700$ Н·м.

В сечении d-d на участке DE $M_K = 200 - 400 - 600 + 100 + 200 = - 500$ Н·м.

Эпюра крутящих моментов имеет форму прямоугольников, за исключением участка, на котором приложен распределенный крутящий момент. Следует отметить, что в том сечении, где имеется сосредоточенный крутящий момент, ордината эпюры скачкообразно изменяется на величину приложенного здесь момента.

5.3. Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого сечения

При анализе деформаций кручения будем основываться на следующих гипотезах:

1. При кручении круглого вала поперечные сечения, плоские до деформации вала, остаются плоскими и перпендикулярными к его продольной оси и после деформации (гипотеза плоских сечений).

2. Радиусы сечения, прямые до кручения, остаются прямыми и при кручении.

3. Расстояния между поперечными сечениями не изменяются, но поперечные сечения, вследствие деформации сдвига, поворачиваются друг относительно друга как жесткое целое.

4. Касательные напряжения пропорциональны деформации сдвига.

Условие прочности для круглого сечения записывается в виде:

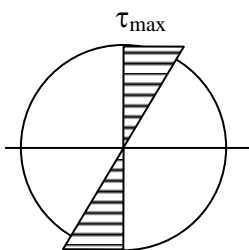
$$\tau_{max} = \frac{M_K \cdot \rho_{max}}{J_p} \leq [\tau], \quad (5.3)$$

где, M_K - максимальный крутящий момент на участке,

J_p - полярный момент инерции на том же участке.

Учитывая, что $W_p = \frac{J_p}{R}$, называемый полярным моментом сопротивления, условие прочности приобретает следующий вид:

$$\tau_{max} = \frac{M_{K_{max}}}{W_{p_{max}}} \leq [\tau]. \quad (5.4)$$



Закон изменения касательного напряжения по высоте сечения имеет линейный характер. В центре вала напряжение равно нулю, на периферии вала – максимальное значение, рис.5.3.

Рис.5.3

По четвертой теории прочности $[\tau] \approx 0,6[\sigma]$.

Относительный угол закручивания - θ зависит от крутящего момента и жесткости поперечного сечения вала.

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_p}, \quad (5.5)$$

где GJ_p – жесткость поперечного сечения вала круглого сечения при кручении.

Учитывая, что $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$, определяем величину абсолютного угла закручивания (взаимный угол поворота сечений) $\varphi = \int_0^l \frac{M_K dz}{GJ_p}$.

Если в пределах цилиндрического участка вала длиной l крутящие моменты в сечениях не изменяются, то $\varphi = \frac{M_K l}{GJ_p}$.

Условия жесткости при кручении имеет вид

$$\theta_{max} = \frac{M_K}{GJ_p} \leq [\theta], \quad (5.6)$$

где $[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

5.4. Кручение вала прямоугольного сечения

Задача об определении касательных напряжений и углов закручивания для вала с некруглым поперечным сечением не может быть решена методами сопротивления материалов. В данном случае гипотеза плоских сечений не применима. Это подтверждают экспериментальные исследования.

В случае кручения вала прямоугольного сечения наибольшие касательные напряжения возникают в серединах длинных сторон прямоугольника, т.е. в точках А и В, рис.5.4б. Результаты решения, полученные Сен-Венаном, дают следующие зависимости:

$$\tau_A = \tau_{max} = \frac{M_K}{W_K}, \text{ где } W_K = \alpha hb^2 \quad (5.7)$$

где h – большая сторона, а b – малая сторона прямоугольника.

В точке С $\tau_c = \gamma \cdot \tau_{max}$.

Угол закручивания на длине l находят по формуле:

$$\varphi = \frac{M_K l}{GJ_K}, \text{ где } J_K = \beta hb^3. \quad (5.8)$$

Коэффициенты α , β , γ зависят от отношения h/b и находятся по справочным таблицам (табл.5.1).

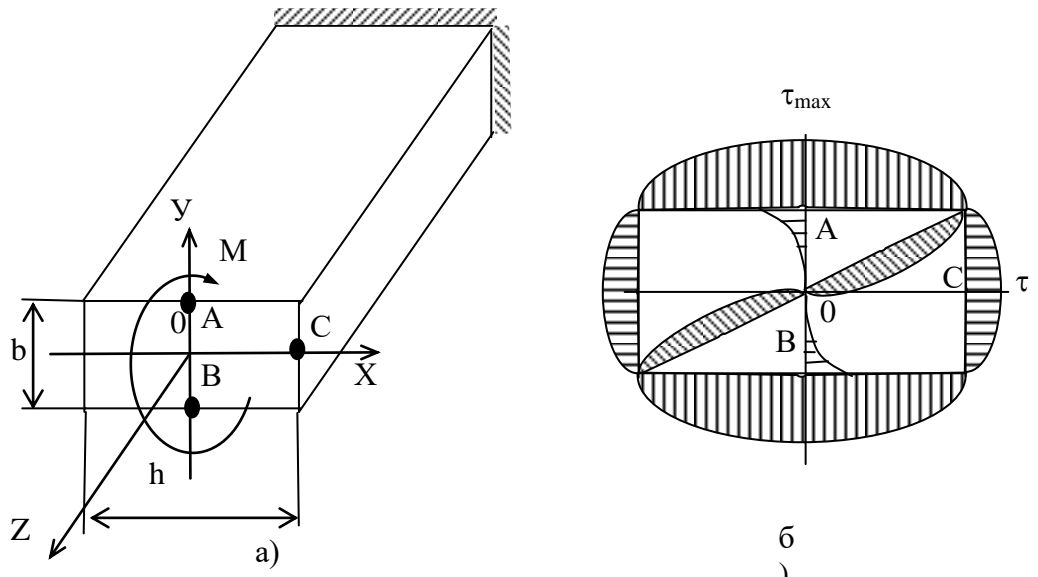


Рис.5.
4

Таблица 5.1

h/b	α	β	γ
1,00	0,208	0,141	1,000
1,50	0,231	0,196	0,859
1,75	0,239	0,214	0,820
2,00	0,246	0,229	0,795
2,50	0,258	0,249	0,766
3,00	0,267	0,263	0,753
4,00	0,282	0,281	0,745
6,00	0,299	0,299	0,743
8,00	0,313	0,313	0,742
10,00	0,313	0,313	0,742
> 10	0,333	0,333	0,742

Условия прочности и жесткости для прямоугольного сечения имеют следующий вид:

$$\tau_{max} = \frac{M_K}{W_K} \leq [\tau],$$

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_K} \leq [\theta].$$

(5.9)

5.5. Рациональные формы сечений при кручении

За критерий рациональности принимается удельный момент сопротивления $w_p = \frac{W_p}{\sqrt{F^3}}$ ($w_k = \frac{W_k}{\sqrt{F^3}}$, для некруглого сечения) с позиции прочности и удельный радиус инерции $j_p = \frac{J_p}{F^2}$ ($j_k = \frac{J_k}{F^2}$, для некруглого сечения) с позиции жесткости.

Чем больше эти параметры, тем рациональнее сечение.

Пример: Расчет стального вала на прочность и жесткость.

Определить размеры стального вала сплошного круглого, трубчатого и прямоугольного сечения из условий прочности и жесткости для схемы нагружения, изображенной на рис.5.2б.

Допускаемое напряжение $[\tau]=96$ МПа, допускаемый относительный угол закручивания $[\theta]=0,5$ град/м. Отношение внутреннего диаметра к наружному у трубчатого сечения, $\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$, отношение большей стороны прямоугольного сечения к наименьшей $\frac{h}{b} = 2$.

Решение:

1. Определить размеры вала, удовлетворяющие условиям прочности и жесткости, и округлить их до нормализованного значения по ГОСТ 6636-99 (приложение). Для вала постоянного сечения опасным будет сечение С, где $M_k=800$ Н·м имеет наибольшее значение.

Сплошное круглое сечение.

Определение диаметра вала из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau], \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16},$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_k \cdot 16}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{800 \cdot 16}{3,14 \cdot 96 \cdot 10^6}} = 3,49 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

из условия жесткости:

$$\theta_{\max} = \frac{M_k}{GJ_p} \leq [\theta], \quad [\theta] = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}} = 0,0087 \frac{\text{рад}}{\text{м}},$$

$$J_p \geq \frac{M_k}{G[\theta]}, \quad J_p = \frac{\pi D^4}{32},$$

модуль сдвига для стали принимаем $G=8 \cdot 10^4$ МПа.

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_k \cdot 32}{\pi G [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{800 \cdot 32}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,0087}} = 5,85 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Наибольшее значение диаметра получилось из условия жесткости. Из нормального ряда линейных размеров принимаем ближайшее значение $D=60$ мм.

Трубчатое сечение.

Из условия прочности $W_p \geq \frac{M_K}{[\tau]}$, $W_p = \frac{\pi D^3}{16}(1-\alpha^4)$,

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_K \cdot 16}{\pi[\tau](1-\alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{800 \cdot 16}{3,14 \cdot 96 \cdot 10^6 (1-0,8^4)}} = 4,16 \cdot 10^{-2} \text{ м} .$$

Из условия жесткости $J_p \geq \frac{M_K}{G[\theta]}$, $J_p = \frac{\pi D^4}{32}(1-\alpha^4)$, тогда

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_K \cdot 32}{\pi G[\theta](1-\alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{800 \cdot 32}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,0087 \cdot 0,59}} = 6,67 \cdot 10^{-2} \text{ м} .$$

Принимаем $D = 67$ мм.

Прямоугольное сечение.

Из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} \leq [\tau], W_K = \alpha h b^2 = \alpha \cdot 2b^3, \text{ из таблицы № 5.1 } \alpha=0,246,$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{M_K}{2\alpha[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{800}{2 \cdot 0,246 \cdot 96 \cdot 10^6}} = 2,57 \cdot 10^{-2} \text{ м} .$$

Из условия жесткости

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_K} \leq [\theta], J_K = \beta h b^3, \text{ из таблицы № 5.1 } \beta=0,229,$$

$$J_K = 2\beta b^4 = 2 \cdot 0,229 b^4, b \geq \sqrt[4]{\frac{M_K}{G \cdot 0,458 \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{800}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,458 \cdot 0,0087}} = 3,98 \cdot 10^{-2} \text{ м} .$$

Принимаем $b = 40$ мм, $h = 80$ мм.

2. Дать эскиз опасного сечения вала и построить эпюру касательных напряжений, рис.5.5 а, б, в.

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} = \frac{800 \cdot 16}{3,14 \cdot 0,06^3} = 18,87 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\tau_{\max} = \frac{800 \cdot 16}{3,14 \cdot 0,067^3 \cdot 0,59} = 23 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\tau_{\max}^A = \frac{800}{2 \cdot 0,246 \cdot 0,04^3} = 25,4 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\tau^B = \gamma \cdot \tau_{\max}^A = 0,795 \cdot 25,4 \cdot 10^6 = 20,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

3. Оценить рациональность рассматриваемых сечений.

Оценим критерии рациональности с позиции жесткости и прочности.

Сплошное круглое сечение

$$\text{С позиции прочности имеем: } w_p = \frac{W_p}{\sqrt{F^3}} = \frac{\pi D^3}{16 \sqrt{\left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^3}} = \frac{4}{2\sqrt{3,14}} = 0,282.$$

$$\text{С позиции жесткости } j_p = \frac{J_p}{F^2} = \frac{\pi D^4}{32 \left(\frac{\pi D^2}{4}\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} = 0,158.$$

Трубчатое сечение

$$w_p = \frac{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}{16 \sqrt{\left[\frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2)\right]^3}} = \frac{1 + \alpha^2}{2\sqrt{\pi(1 - \alpha^2)}} = \frac{1,64}{2\sqrt{3,14 \cdot 0,36}} = 0,771$$

$$j_p = \frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4)}{32 \left[\frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2)\right]^2} = \frac{1 + \alpha^2}{2\pi(1 - \alpha^2)} = \frac{1,64}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,36} = 0,725.$$

Прямоугольное сечение

$$w_K = \frac{W_K}{\sqrt{F^3}} = \frac{2\alpha h^3}{\sqrt{(2 \cdot h^2)^3}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{0,246}{1,41} = 0,174$$

$$j_K = \frac{J_K}{F^2} = \frac{2\beta h^4}{4h^4} = \frac{\beta}{2} = \frac{0,229}{2} = 0,114$$

Отношение критериев рациональности для трубчатого, сплошного круглого и прямоугольного с позиции прочности следующие:

$$w_p^a : w_p^b : w_K = 0,771 : 0,282 : 0,174 = 4,43 : 1,62 : 1$$

С позиции жесткости:

$$j_p^a : j_p^b : j_K = 0,725 : 0,158 : 0,114 = 6,36 : 1,39 : 1.$$

Следовательно, наиболее рациональным сечением из рассмотренных является трубчатое, наименее рациональным – прямоугольное.

Отношение весов $Q = \gamma F l$ этих валов будет равно:

$$Q^a : Q^b : Q^c = \frac{\pi D_{TP}^2}{4} (1 - \alpha^2) : \frac{\pi D_{сцл}^2}{4} : 2b^2 = \frac{3,14 \cdot 6,7^2}{4} \cdot 0,36 : \frac{3,14 \cdot 6^2}{4} : 2 \cdot 4^2 = 0,40 : 0,88 : 1.$$

Из отношения весов следует, что вес вала с трубчатым сечением в 2,5 раза легче вала с прямоугольным сечением и в 2,2 раза легче вала со сплош-

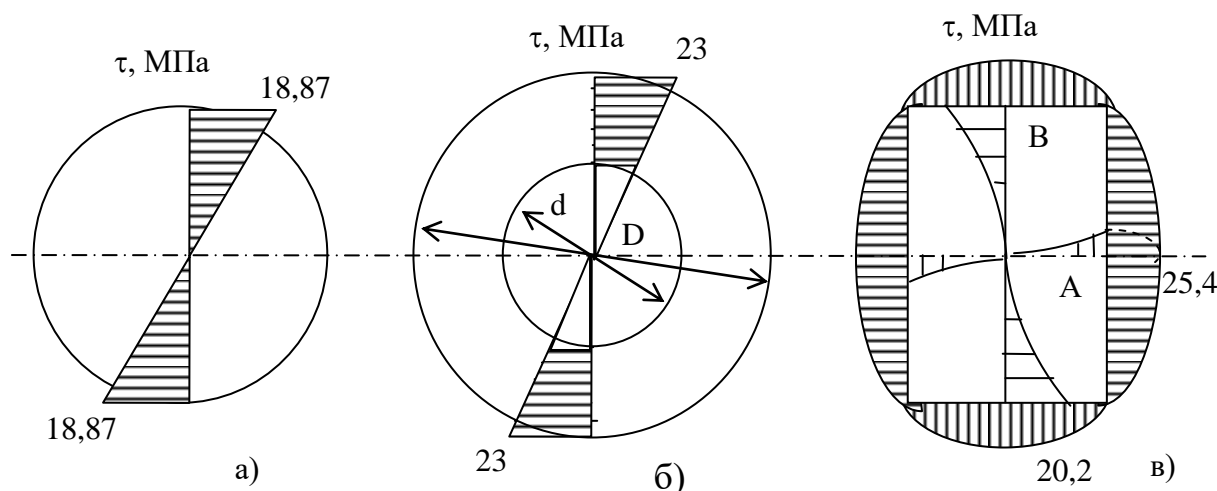


Рис.5.5

ным круглым сечением.

4. Определить углы закручивания участков вала трубчатого сечения и построить эпюру углов закручивания.

Обозначим площади эпюры крутящих моментов на участках за $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, которые представляют собою произведение M_k на длину участка (ω_3 – произведение средней линии трапеции на длину участка).

Тогда, принимая за начало отсчета сечение А (рис.5.2б), получим:

$$\varphi_{B-A} = \frac{\omega_1}{GJ_p} = \frac{200 \cdot 1 \cdot 180^0}{8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{3,14}{32} \cdot 0,067^4 (1 - 0,8^4) \cdot 3,14} = 0,067^0,$$

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} - \frac{\omega_2}{GJ_p} = \frac{200 \cdot 1}{GJ_p} - \frac{200 \cdot 1}{GJ_p} = 0,$$

$$\varphi_{D-A} = \varphi_{C-A} - \frac{\omega_3}{GJ_p} = -\frac{\frac{800 + 700}{2} \cdot 1 \cdot 180^0 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,067^4 \cdot 0,59} = -0,251^0$$

$$\varphi_{E-A} = \varphi_{D-A} - \frac{\omega_4}{GJ_p} = -0,251^0 - \frac{500 \cdot 0,5 \cdot 180^0 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,067^4 \cdot 0,59} = -0,404^0.$$

На основании расчетов строим эпюру углов закручивания, рис.5.2б.

На тех участках, где эпюра $M_k = \text{const}$, закономерность на эпюре углов закручивания выражена линейной зависимостью. На тех участках, где есть распределенный крутящий момент постоянной интенсивности, эпюра - φ выражена параболой второго порядка. В тех сечениях, где приложены сосредоточенные крутящие моменты, на эпюре φ наблюдается излом.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ № 5

Расчет вала на прочность и жесткость

Определить размеры стального вала из условия прочности и жесткости, оценить рациональность трубчатого, сплошного круглого и прямоугольного сечений. Найти отношение весов этих сечений. Схемы нагружения валов и численные значения данных выбираются в соответствии с шифром из рис. 5.6 и таблицы 5.2.

Общие данные: $[\tau]=96$ МПа; $[\theta]=0,5$ град/м.

Указание: крутящий момент, направление и величина которого не указаны на рисунке, определяется из условия равновесия вала.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить в масштабе схему вала, указать численные значения заданных величин.
2. Составить уравнения крутящих моментов по участкам и построить эпюру крутящих моментов.
3. Определить размеры вала (круглого сплошного, прямоугольного, трубчатого сечения), удовлетворяющие условиям прочности и жесткости, и округлить их до нормализованного значения по ГОСТ 6636-69 (приложение).
4. Дать эскиз опасного сечения вала и построить эпюру напряжений для рассмотренных типов сечений.
5. Оценить рациональность сечений и отношение весов валов с рассматриваемыми сечениями, дать заключение.
6. Определить углы закручивания участков вала с рациональным сечением и построить эпюру углов закручивания.

Таблица 5.2

№	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я		8-я
	схема	$l, \text{ м}$	$M_1, \text{ Нм}$	$M_2, \text{ Нм}$	$M_3, \text{ Нм}$	$m, \text{ Нм/м}$	d/D	b/h	k
1	1	0,20	25	80	330	200	0,50	2,5	1
2	2	0,40	45	125	470	250	0,35	2,0	1,3
3	3	0,60	65	175	500	300	0,45	1,0	1,5
4	4	0,80	85	210	490	100	0,85	1,5	1,7
5	5	0,10	20	240	520	150	0,75	2,5	1,9
6	6	0,30	30	260	440	170	0,60	3,0	1,2
7	7	0,50	40	270	430	120	0,70	1,0	1,4
8	8	0,70	50	290	180	140	0,80	2,0	1,5
9	9	0,25	60	160	260	180	0,65	1,5	1,6
0	10	0,35	70	140	190	230	0,55	2,0	1,8

Вопросы для самопроверки:

1. Понятие о чистом сдвиге, закон Гука для сдвига, напряженное состояние при чистом сдвиге.
2. Что называется кручением?

3. Эпюра крутящих моментов.
4. Как записывается условие прочности для валов круглого и прямоугольного сечений?
5. Как записывается условие жесткости для валов круглого и прямоугольного сечений?
6. Полярный момент сопротивления и полярный момент инерции для вала круглого (сплошного) и трубчатого сечений.
7. Эпюра касательных напряжений при кручении валов круглого и прямоугольного сечений.
8. Понятие о критериях рациональности сечений при кручении.

ГЛАВА 6 ИЗГИБ

6.1. Понятие об изгибе

Изгиб – такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты. Если в сечении действует один изгибающий момент, а остальные внутренние силовые факторы отсутствуют, изгиб называют чистым. Однако обычно вместе с изгибающими моментами возникают и поперечные силы. Такой изгиб называют поперечным. Стержень, работающий в основном на изгиб, называется балкой. Если все силы, включая опорные реакции, действуют в плоскости, проходящей через главную центральную ось сечения, то ось изогнутой балки также лежит в этой плоскости, а сам изгиб называют плоским. Стержневая система, элементы которой во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой, называется рамой. Ось такой системы представляет собой ломаную линию. Вертикально расположенные стержни называются стойками, горизонтально – ригелями. Рама называется плоской, если: а) ось рамы находится в одной плоскости; б) все внешние нагрузки действуют в этой же плоскости; в) сечения всех стержней имеют оси симметрии, которые лежат в плоскости нагружения. В настоящем разделе мы будем рассматривать только плоский изгиб.

6.2. Расчет балок на прочность.

Внешняя нагрузка обычно задана, поэтому для нахождения всех действующих на балку сил необходимо вычислить реакции опор. Напомним, что наименьшее число связей, обеспечивающее неподвижность балки по отношению к основанию в одной плоскости, равна трем. Уравнения равновесия, из которых определяются опорные реакции, могут быть записаны при этом тремя различными способами:

1. $\sum P_z = 0; \sum P_y = 0; \sum M_a = 0;$

здесь сумма моментов берется относительно любой точки А, лежащей в плоскости действия сил;

$$2. \sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum P_Z = 0;$$

здесь ось oz не должна быть перпендикулярна прямой АВ;

$$3. \sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0;$$

в этом случае точки А, В и С не должны лежать на одной прямой.

При работе составных балок, состоящих из нескольких шарнирно соединенных частей, следует иметь в виду, что уравнения равновесия можно записать как для всей системы в целом, так и для каждой из частей в отдельности. В таких задачах общее число опорных реакций больше трех, но зато и независимых уравнений статики также больше. Системы, в которых число уравнений равновесия достаточно для определения всех опорных реакций, называются статически определимыми.

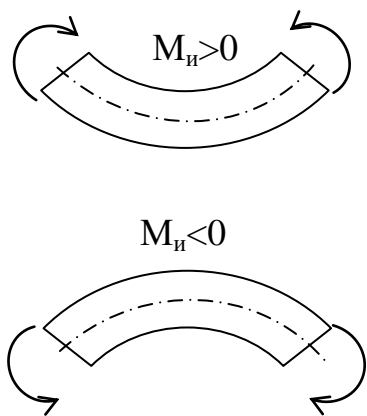


Рис. 6.1

При расчетах на прочность балок необходимо знать, как меняются по длине балки внутренние усилия, и уметь строить их эпюры. Эта задача решается на основе метода сечений, согласно которому поперечная сила в произвольном сечении балки находится как алгебраическая сумма внешних сил, действующих на отсеченную часть балки. Аналогично определяется изгибающий момент в сечении, который вычисляется как алгебраическая сумма моментов относительно центра тяжести данного сечения всех внешних сил, приложенных к отсеченной части балки. Используются следующие

правила знаков.

Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает сжатие верхних волокон балки и растяжение нижних, как это показано на верхнем рисунке 6.1. На нижнем рисунке показана деформация балки, изгибающий момент в которой отрицателен. Эпюра моментов строится на оси балки, при этом

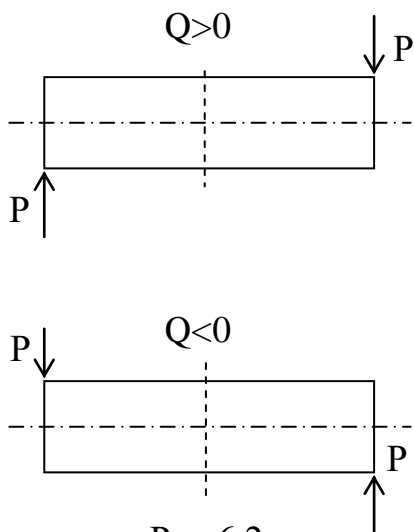


Рис.6.2

положительные ординаты эпюры откладываются вверх, т.е. в сторону вогнутости оси балки. Поэтому иногда говорят, что эпюра моментов строится на сжатых волокнах балки.

Поперечная сила в сечении считается положительной, если равнодействующая внешних сил, приложенных слева от сечения, направлена вверх, а справа от сечения – вниз. Если же равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена

вниз, а справа – вверх, поперечная сила отрицательна, как это показано на рисунке 6.2.

При построении эпюр внутренних усилий и их проверке неоценимую помощь оказывает знание дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y; \quad \frac{dQ_y}{dz} = q; \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q. \quad (6.1)$$

Таким образом, поперечная сила представляет собой производную от изгибающего момента по длине балки. Производная же от поперечной силы равна интенсивности внешней распределенной нагрузки q . Одновременно интенсивность распределенной нагрузки является второй производной от функции изгибающих моментов. Из приведенных соотношений можно сделать некоторые общие выводы о характере эпюр внутренних усилий при изгибе.

Если балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой, то, очевидно, Q_y будет линейной, а M_x – квадратичной функцией координаты z . Если балка нагружена сосредоточенными силами и моментами ($q=0$), то поперечная сила будет постоянной, а момент – линейной функцией координаты z . В точках приложения сосредоточенных сил эпюра Q_y претерпевает скачок на величину внешней силы, а на эпюре M_x возникает излом, поскольку производные момента слева и справа от этих точек имеют различные значения. В точках приложения сосредоточенных моментов эпюра M_x претерпевает скачок на величину внешнего момента. В сечениях, в которых поперечная сила Q_y равна нулю, в зависимости от знака q , на эпюре M_x наблюдается максимум или минимум ($q>0$, если распределенная нагрузка направлена вверх).

Имея эпюры внутренних усилий, несложно выбрать опасные сечения и приступить к расчету балки на прочность. Наибольший интерес при этом представляют нормальные напряжения, которые связаны с изгибающим моментом следующим образом:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \quad (6.2)$$

где J_x – момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости нагружения, y – расстояние от этой оси до рассматриваемой точки сечения.

Наибольшего значения напряжение σ достигает в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии:

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{J_x} y_{max}. \quad (6.3)$$

Отношение $\frac{J_x}{|y|_{\max}}$ называется моментом сопротивления сечения при изгибе и обозначается W_x . Таким образом, для обеспечения прочности балки необходимо потребовать, чтобы в опасном сечении максимальное напряжение не превышало допустимого:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leq [\sigma]. \quad (6.4)$$

Здесь $|M_x|$ - абсолютная величина изгибающего момента в опасном сечении, $[\sigma]$ – допустимое напряжение материала балки.

Наиболее рациональными являются такие формы поперечных сечений, для которых с наименьшим расходом материала обеспечивается наибольшая величина момента сопротивления W_x . Очевидно, что для этого необходимо распределять основную часть площади сечения как можно дальше от нейтральной оси. В качестве критерия рациональности принимается отношение удельный момент сопротивления $w_x = \frac{W_x}{\sqrt{F^3}}$. Чем больше этот параметр, тем рациональнее сечение. Из этих соображений появились тонкостенные сечения в форме стандартных двутавров и швеллеров, которые оказались значительно экономичнее сечений другой формы.

Однако, если для сплошных сечений прочность определяется исключительно нормальными напряжениями, то для тонкостенных необходимы дополнительные проверки прочности. Это связано с тем, что в тонкостенных профилях разрушение при поперечном изгибе может произойти срезом за счет появления значительных по величине касательных напряжений, достигающих максимума на центральной оси сечения. Поскольку ширина сечения в этом месте у стандартных профилей невелика, в число опасных необходимо включить сечение, в котором поперечная сила достигает наибольшего по модулю значения.

Касательные напряжения находятся по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{omc}}{J_x \delta}, \quad (6.5)$$

где S_x^{omc} - статический момент части сечения, отсеченной горизонтальной плоскостью, проходящей через слой, в котором вычисляется напряжение; δ – ширина этого слоя.

Применительно к двутавровому сечению условие прочности по наибольшим касательным напряжениям принимает вид:

$$|\tau|_{\max} = \frac{|Q_y|_{\max} S_x^*}{J_x \cdot d} \leq [\tau]. \quad (6.6)$$

Здесь $|Q_Y|_{\max}$ - наибольшее по модулю значение поперечной силы; S_x^* - статический момент половины сечения относительно оси x (приведен в справочных таблицах для стандартных профилей); $[\tau]$ - допускаемое касательное напряжение материала балки.

Если условие прочности по касательным напряжениям не выполняется, то необходимо изменить номер двутавра и повторить расчет. Это делается последовательным перебором стандартных сечений до тех пор, пока условие прочности по касательным напряжениям не будет выполнено. Условие прочности по нормальным напряжениям при этом можно не проверять, поскольку оно заведомо выполняется.

Но даже выполнение обоих условий прочности при использовании тонкостенных профилей не избавляет от опасности разрушения. Для двутавра существуют опасные точки, расположенные в месте перехода от полки к стенке. Хотя нормальные и касательные напряжения здесь не достигают максимума, но они достаточно большие и действуют одновременно. Следует иметь в виду, что обеспечить прочность в этих точках необходимо для всех сечений, в которых одновременно велики изгибающий момент и поперечная сила. Причем эти сечения могут не совпадать с принятыми ранее в качестве опасных. Напряженное состояние в этих точках является плоским, что приводит к необходимости использования теорий прочности. Поведение изотропного пластичного материала наилучшим образом описывается в этом случае третьей или четвертой теориями прочности:

$$\sigma_{\text{э}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad \sigma_{\text{э}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (6.7)$$

Здесь $\sigma_{\text{э}}^{\text{III}}$ и $\sigma_{\text{э}}^{\text{IV}}$ - эквивалентные напряжения по соответствующим теориям, сравниваемые с допускаемым напряжением; σ , τ - нормальное и касательное напряжение в опасной точке:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y_{\text{оп}}, \quad \tau = \frac{Q_y S_x^{\text{омс}}}{J_x \cdot d}.$$

Здесь $y_{\text{оп}}$ - координата опасной точки, d - толщина стенки, $S_x^{\text{омс}}$ - статический момент площади полки двутавра относительно оси x . Размеры полки двутавра, форма которой близка к прямоугольнику, приведены в справочных таблицах. В свою очередь, статический момент прямоугольника относительно оси x легко вычисляется как произведение его площади на расстояние от оси x до центра тяжести прямоугольника.

Ниже приведены задания и подробные примеры их выполнения.

6.3. Пример расчета балки на прочность по нормальным напряжениям

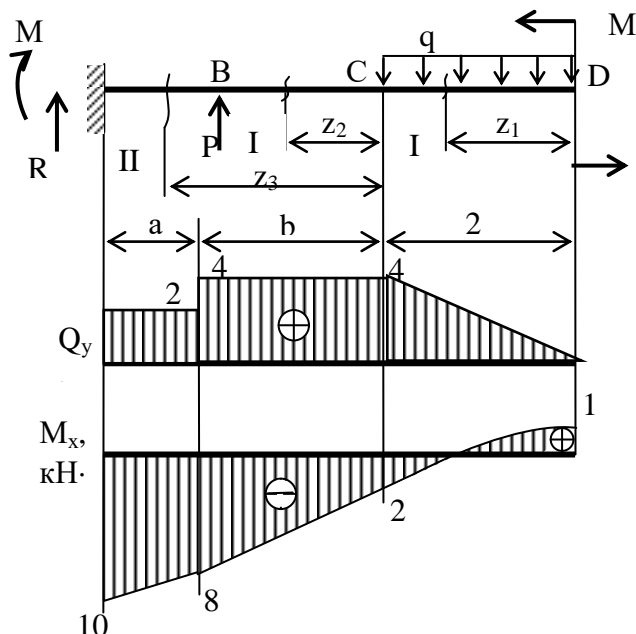


Рис.6.3

Для заданной балки из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры различных по форме поперечных сечений: двутавра, прямоугольника

- а) (с соотношением сторон $\frac{h}{b} = 1,8$),
 квадрата, круга, кольца (при $\frac{d}{D} = 0,8$) и оценить их рациональность.
 б)

$a = 1,0 \text{ м}$

$b = 1,4 \text{ м}$

$P = 18 \text{ кН}$

$q = 20 \text{ кН/м}$

$M = 16 \text{ кН}\cdot\text{м}$

$[\sigma] = 160 \text{ МПа}$

Решение.

1. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов по участкам и построить их эпюры.

Запишем уравнения статики и определим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0: -M_A + P \cdot a - q \cdot 2 \cdot a \cdot (b + 2 \cdot a) + M = 0;$$

$$M_A = -102 [\text{кН}\cdot\text{м}];$$

$$\sum P_Y = 0: R_A + P - q \cdot 2 \cdot a = 0; R_A = 22 [\text{кН}];$$

Проверка: $\sum M_B = 0: -M_A - R_A \cdot a - q \cdot 2 \cdot a \cdot (a + b) + M = 0.$

Выражения для внутренних усилий Q_y , M_x получим с помощью метода сечений. Поперечная сила в произвольном сечении балки равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения. При этом поперечная сила считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена вверх, а справа – вниз, т.е. стремится сдвинуть левую отсеченную часть балки относительно правой вверх.

Изгибающий момент в сечении балки равен алгебраической сумме моментов относительно данного сечения всех внешних сил, приложенных к от-

сеченной части. Момент считается положительным, если сжатые волокна находятся в верхней части сечения балки.

На рис.6.3а показаны выделенные участки балки. Запишем для каждого из них выражения внутренних усилий и найдем их значения на границах участков.

1. $0 \leq z_1 \leq 2,0\text{ м}$

$$Q_y = qz_1 = 20z_1; \quad Q_y(0) = 0; \quad Q_y(2) = 40 [\text{кН}].$$

$$M_x = M - qz_1^2 = 16 - 10z_1^2; \quad M_x(0) = 16 [\text{кН} \cdot \text{м}]; \quad M_x(2) = 40 [\text{кН} \cdot \text{м}].$$

2. $0 \leq z_2 \leq 1,4\text{ м}$

$$Q_y = q \cdot 2a = 40 [\text{кН}];$$

$$M_x = M - q \cdot 2a \cdot (z_2 + a) = -24 - 40z_2 [\text{кН} \cdot \text{м}];$$

$$M_x(0) = -24 [\text{кН} \cdot \text{м}];$$

$$M_x(1,4) = -80 [\text{кН} \cdot \text{м}].$$

3. $1,4 \leq z_3 \leq 2,4\text{ м}$

$$Q_y = q \cdot 2a - P = 22 [\text{кН}].$$

$$M_x = M - q \cdot 2a \cdot (z_3 + a) + P \cdot (z_3 - b) = -49,2 - 22z_3; \quad M_x(1,4) = -80 [\text{кН} \cdot \text{м}];$$

$$M_x(2,4) = -102 [\text{кН} \cdot \text{м}].$$

Построение эпюр Q_y , M_x проводится по участкам на основе полученных уравнений. Положительные значения ординат откладываются выше оси, отрицательные – ниже. На первом участке поперечная сила линейно зависит от координаты, возрастая от нуля в начале участка до 40кН в конце. Эпюра Q_y на этом участке ограничена отрезком прямой, проходящей через указанные значения. Изгибающий момент имеет на данном участке уравнение квадратной параболы с вершиной в сечении $z_1=0$, т.е. там, где равна нулю поперечная сила, являющаяся производной от M_x по координате z . Эпюра изгибающего момента ограничена кривой второго порядка, проходящей через точки с координатами 16 кН·м и –24 кН·м, соответственно на правой и левой границах участка. Парабола имеет выпуклость, направленную навстречу распределенной нагрузки.

На втором и третьем участках поперечная сила имеет постоянные значения, соответственно 40 кН и 22 кН. Изгибающий момент меняется по линейному закону – эпюра M_x ограничена на участках отрезками прямых, проходящих через точки с ординатами –24 кН·м, –80 кН·м на втором, и –80 кН·м, –102 кН·м на третьем участках. Результаты построения эпюр Q_y , M_x приведены на рис.6.3 а, б.

Наиболее опасным является сечение А, в котором изгибающий момент достигает наибольшего по модулю значения $M_x = 102 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

2. Произвести проверку с помощью дифференциальных зависимостей.

Построению эпюры проводится на основе известных дифференциальных зависимостей между Q_y , M_x и интенсивностью распределенной нагрузки q (6.1).

В нашем случае на первый участок действует распределенная нагрузка $q = \text{const}$, следовательно, поперечная сила должна быть линейной функцией координаты z_1 , а изгибающий момент меняться по закону квадратной параболы. Эпюра изгибающих моментов не имеет экстремумов, поскольку эпюра ее производной - Q_y не пересекает ось. Второй и третий участки свободны от распределенной нагрузки, т.е. производная функции Q_y тождественно равна нулю, следовательно, сама поперечная сила должна быть постоянна в границах каждого участка, а эпюра изгибающего момента описывается прямой наклонной линией.

В тех сечениях, где балка нагружена сосредоточенными внешними силами, на эпюре Q_y должно скачком меняться значение ординаты на величину этой силы с учетом ее направления. В нашем случае это происходит в сечении А, где возникает реакция R_A , и в сечении В, где приложена нагрузка P . На эпюре M_x аналогичные скачки имеют место в сечениях А и D, где действует сосредоточенные внешние моменты. Анализируя все перечисленное делаем вывод о правильности построения эпюр.

3. Подобрать размеры указанных выше сечений из условия прочности по нормальным напряжениям.

Из условия прочности при изгибе $|\sigma|_{max} = \frac{|M_x|_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$, определим требуемое значение момента сопротивления сечения балки:

$$W_x \geq \frac{|M_x|_{max}}{[\sigma]} = \frac{102 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 637,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 637,5 \text{ см}^3 .$$

Определим размеры указанных сечений, обеспечивающие прочность балки.

1) Подбираем по ГОСТ 8239-72 номер двутавра, момент сопротивления которого наиболее близок к расчетному. В данном случае подходит двутавр № 36, у которого $W_x = 743,0 \text{ см}^3$, площадь сечения $F = 61,9 \text{ см}^2$.

Определим наибольшее значение возникающих при этом напряжений:

$$|\sigma|_{max} = \frac{102 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} = 137,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 137,3 \text{ МПа} < [\sigma].$$

2) Определяем размеры прямоугольного сечения с отношением сторон $h/b = 1,8$.

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (1,8b)^2}{6} = 0,54b^3 ;$$

$$0,54b^3 \geq 637,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 ;$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{637,5 \cdot 10^{-6}}{0,54}} = 0,106 \text{ м}^3.$$

Окончательно выбирает размер по ГОСТ 6636-69: $b=110$ мм, $F=bh=217,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Вычислим наибольшее напряжение:

$$\sigma_{max} = \frac{102 \cdot 10^3}{0,54 \cdot (0,11)^3} = 142,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 142,0 \text{ МПа} < [\sigma].$$

3) Определим размер квадратного сечения.

$$W_x = \frac{a^3}{6}; \quad \frac{a^3}{6} \geq 637,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad a \geq \sqrt[3]{6 \cdot 637,5 \cdot 10^{-6}} = 0,157 \text{ м}.$$

Окончательно: $a = 160$ мм, $F = a^2 = 256 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Определим наибольшее напряжение:

$$\sigma_{max} = \frac{102 \cdot 10^3 \cdot 6}{0,16^3} = 149,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 149,4 \text{ МПа} < [\sigma].$$

4) Определим размеры круглого сечения.

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}; \quad \frac{\pi d^3}{32} = 637,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 637,5 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 0,187 \text{ м}.$$

Принимаем по ГОСТу $d=200$ мм, площадь сечения $F = \frac{\pi d^2}{4} = 314 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Определим наибольшее напряжение:

$$|\sigma|_{max} = \frac{102 \cdot 10^3}{\frac{3,14}{32} \cdot (0,2)^3} = 129,9 \cdot 10^6 \text{ Па} = 129,9 \text{ МПа} < [\sigma].$$

5) Определим размеры кольцевого сечения с отношением внутреннего и внешнего диаметров $\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$.

$$W_x = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4); \quad \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \geq 637,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 637,5 \cdot 10^{-6}}{3,14 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 0,224 \text{ м}.$$

Принимаем $D=250$ мм, $d=200$ мм.

Площадь сечения $F = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = 176,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$.

Вычислим наибольшее напряжение:

$$\sigma_{max} = \frac{102 \cdot 10^3}{\frac{3,14}{32} \cdot (0,25)^3 \cdot (1 - 0,8^4)} = 112,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 112,3 \text{ МПа} < [\sigma]$$

4. Оценить рациональность подобранных сечений.

1) двутавр: $w_x = \frac{W_x}{\sqrt{F^3}} = \frac{743}{\sqrt{61,9^3}} = 1,52,$

2) прямоугольник: $\frac{637,5}{\sqrt{217,8^3}} = 0,2,$

3) квадрат: $\frac{637,5}{\sqrt{256^3}} = 0,16,$

4) круг: $\frac{637,5}{\sqrt{314^3}} = 0,11,$

5) кольцевое сечение: $\frac{637,5}{\sqrt{176,6^3}} = 0,27.$

Как видим, наиболее рациональными при изгибе являются тонкостенные сечения, двутавр, кольцевое сечение.

5. Построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении (для двутавра, кольца).

Напряжения в опасном сечении меняются по линейному закону:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y,$$

достигая максимума в наиболее удаленных от оси точках.

На рис.6.4 показаны эпюры напряжений для указанных сечений.

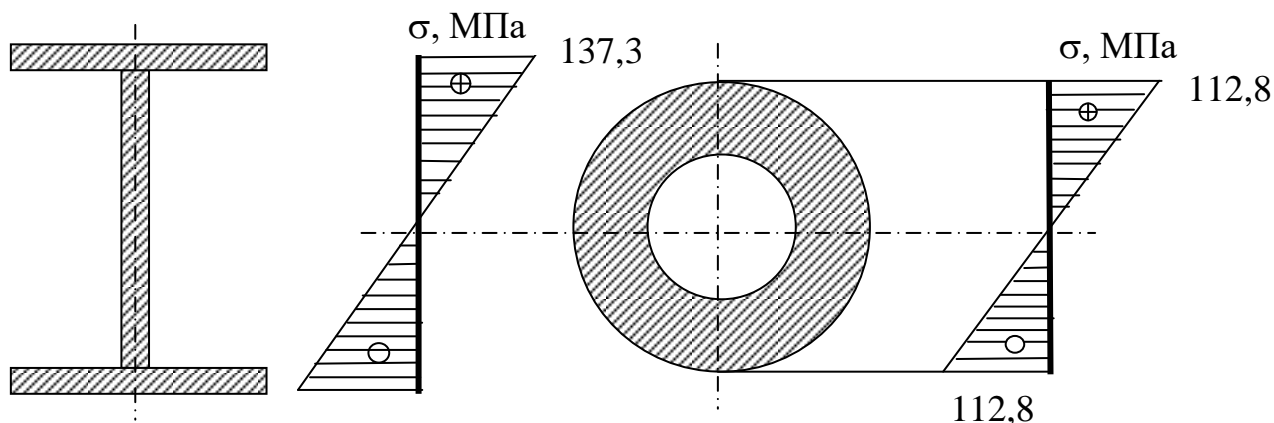


Рис.6.4

6.3. Расчет на прочность двутавровой балки

Для заданной стальной балки из условия прочности подобрать номер двутавра по ГОСТ 8239-72 и произвести полную проверку прочности.

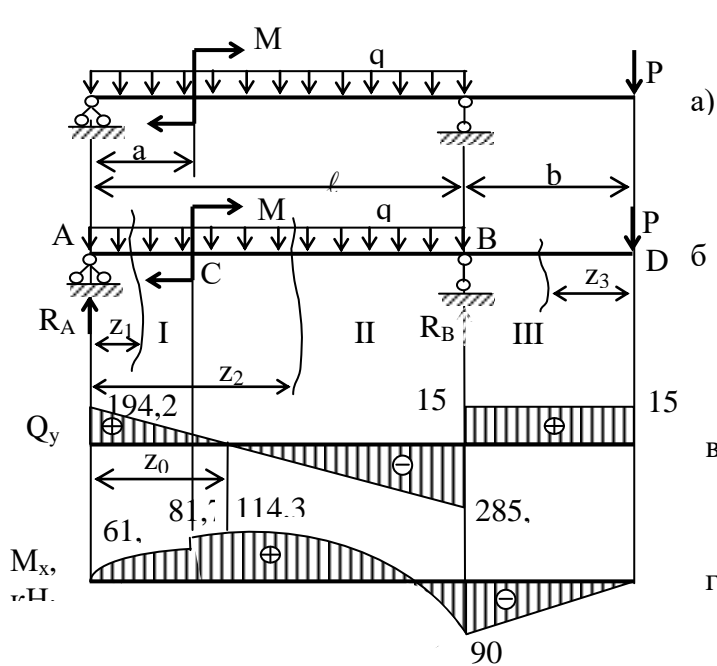


Рис.6.5

a) $a=0,4$ м

$b=0,6$ м

$l=2,4$ м

$P=150$ кН

б $q=200$ кН/м

$M=20$ кН·м

$[\sigma]=160$ МПа

в $[\tau]=0,6[\sigma]=96$ МПа

Решение:

г) 1. Составить уравнение поперечных сил и изгибающих моментов по участкам и построить их эпюры.

Запишем уравнения статики и определим опорные реакции, показанные на рис.6.5б.

$$\sum M_A = 0: -q \cdot \frac{l^2}{2} - M + R_B \cdot l - P \cdot (l + b) = 0; R_B = 435,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot l + q \cdot \frac{l^2}{2} - M - P \cdot b = 0; R_A = 194,2 \text{ кН}.$$

Реакции получились положительные, это означает, что их направление выбрано верно. Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось:

$$\sum P_Y = R_A - q \cdot l + R_B - P = 194,2 - 200 \cdot 2,4 + 435,8 - 150 = 0.$$

Выделим и обозначим участки балки так, как это показано на рис.6.5б. Используя уже известный метод сечений, для каждого участка запишем выражения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и вычислим их значения в характерных сечениях.

1. $0 \leq z_1 \leq 0,4$ м

$$Q_y = R_A - q \cdot z_1 = 194,2 - 200z_1; Q_y(0) = 194,2 \text{ кН}; Q_y(0,4) = 114,2 \text{ кН}.$$

$$M_x = R_A \cdot z_1 - q \cdot \frac{z_1^2}{2} = 194,2z_1 - 100z_1^2; M_x(0) = 0; M_x(0,4) = 61,7 \text{ кН·м}.$$

11. $0,4 \leq z_2 \leq 2,4$ м

$$Q_y = R_A - q \cdot z_2 = 194,2 - 200z_2; \quad Q_y(0,4) = 114,2 \text{ кН}; \quad Q_y(2,4) = -285,8 \text{ кН}.$$

Значения поперечной силы на левой и правой границах участка имеют разные знаки, следовательно, имеется такое значение координаты z_0 , при котором Q_y обращается в нуль, а момент M_x имеет экстремум. Найдем величину z_0 :

$$R_A - q \cdot z_0 = 194,2 - 200z_0 = 0;$$

$$z_0 = 0,971 \text{ м};$$

$$M_x = M + R_A \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = 20 + 194,2z_2 - 100z_2^2.$$

$$M_x(0,4) = 81,7 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_x(2,4) = -90,0 \text{ кН}\cdot\text{м}; \quad M_x(0,971) = M_x^{\max} = 114,3 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

$$111. \quad 0 \leq z_3 \leq 0,6 \text{ м}$$

$$Q_y = P = 150 \text{ кН};$$

$$M_x = -P \cdot z_3 = -150z_3; \quad M_x(0) = 0; \quad M_x(0,6) = -90 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

По вычисленным значениям Q_y , M_x построим их эпюры. При этом будем учитывать вид этих функций, а также дифференциальные зависимости между ними и интенсивностью распределенной нагрузки q . Результат построения показан на рис.6.5 в, г.

2. Определить положение опасных сечений и показать опасные точки на чертеже балки.

К опасным, прежде всего, относится сечение, в котором изгибающий момент принимает наибольшее по модулю значение $|M_x|_{\max}$, т.е. сечение, расположенное на расстоянии z_0 от левого торца балки. Кроме того, опасным может оказаться сечение В, в котором наибольшего значения достигает поперечная сила. К тому же, в данном сечении действует изгибающий момент, лишь немного уступающий максимальному. В первом сечении опасными будут точки, наиболее удаленные от оси – на рис.6.6а они помечены цифрой 1. В этих точках нормальные напряжения достигают наибольшей величины. В сечении В имеется два типа опасных точек. В точках на оси сечения, помеченных на рисунке цифрой 2, наибольшего значения достигают касательные напряжения, что может привести к разрушению срезом. В опасных точках третьего типа (см.рис.6.6а) ни нормальные, ни касательные напряжения не являются максимальными, однако их совместное действие может оказаться опасным.

3. Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать двутавровое сечение.

Определим минимальную величину момента сопротивления из указанного условия прочности в опасном сечении:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_x|_{max}}{W_x} \leq [\sigma], \quad W_x \geq \frac{|M_x|_{max}}{[\sigma]} = \frac{114,3 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 714,4 \cdot 10^{-6} [м^3].$$

Наилучшим образом подходит двутавр № 36 с моментом сопротивления $W_x=734 \text{ см}^3$, моментом инерции $J_x=13380 \text{ см}^4$, статическим моментом половины сечения $S_x=423 \text{ см}^3$ и толщиной стенки $d=7,5 \text{ мм}$.

4. Произвести проверку прочности по максимальным касательным напряжениям и при необходимости усилить сечение.

Поперечная сила достигает наибольшего значения $|Q_y|_{max} = 285,8 \text{ кН}$ над правой опорой (сечение В).

Найти максимальное касательное напряжение:

$$\tau_{max} = \frac{|Q_y|_{max} \cdot S_x^*}{J_x d} = \frac{285,8 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}} = 120,5 \cdot 10^6 \text{ Па} > [\tau].$$

Условие прочности не выполняется, следовательно, необходимо увеличить номер двутавра. Для следующего по ГОСТу двутавра № 40 $W_x=953 \text{ см}^3$, $J_x=19062 \text{ см}^4$, $S_x^*=545 \text{ см}^3$, $d=8,3 \text{ мм}$.

Вновь вычислим наибольшее касательное напряжение:

$$\tau_{max} = \frac{235,8 \cdot 10^3 \cdot 545 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}} = 98,4 \cdot 10^6 \text{ Па} > [\tau].$$

Определим величину перегрузки: $\delta = \frac{\tau_{max} - [\tau]}{[\tau]} \cdot 100\% = 2,5\%$.

Полученное значение менее 5%, следовательно, можно оставить этот номер стандартного профиля.

5. С учетом совместного действия нормальных и касательных напряжений, используя четвертую теорию прочности, проверить прочность балки и при необходимости подобрать новое сечение.

Вычислить нормальное и касательное напряжения в сечении В в точках, помеченных на рис.6.6а цифрой 3.

Расстояние от этих точек до оси $y_{(3)}=h/2-t=200-13=187 \text{ мм}$. Здесь h – высота сечения, t – толщина полки. Нормальное напряжение:

$$\sigma_{(3)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{(3)} = \frac{90 \cdot 10^3}{19062 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,187 = 88,3 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Касательное напряжение можно найти по формуле: $\tau_{(3)} = \frac{Q_y S_y^{omc}}{J_x d}$.

Здесь S_x^{omc} - статический момент части сечения, отсеченной горизонтальной плоскостью, проходящей через точку 3. Эту часть сечения можно без большой погрешности считать прямоугольником размерами $b \cdot t$, где t - уже упоминав-

шаяся толщина полки, а $b=155$ мм – ширина полки указанного двутавра. Вычислим статический момент отсеченной части сечения как произведение ее площади $F_{отс}$ на расстояние от оси x до центра тяжести прямоугольника.

$$y_c = \frac{h}{2} - \frac{t}{2} = 193,5 \text{ мм.}$$

$$S_x^{отс} = F_{отс} \cdot y_c = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 389,9 \cdot 10^{-6} \text{ [м}^3\text{]}.$$

Определим касательное напряжение в точке 3.

$$\tau_{(3)} = \frac{285,8 \cdot 10^3 \cdot 389,9 \cdot 10^{-6}}{19062 \cdot 10^{-8} \cdot 8,3 \cdot 10^{-3}} = 70,4 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

В соответствии с четвертой теорией прочности вычислим эквивалентное напряжение в точке 3 сечения В и сравним его с допустимым.

$$\sigma_{экв}^{IV} = \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 3 \cdot \tau_{(3)}^2} = \sqrt{88,3^2 + 3 \cdot 70,4^2} = 150,6 \text{ МПа} \quad a < [\sigma].$$

Таким образом, двутавр № 40 обеспечивает прочность балки.

6. В опасном сечении построить эпюры нормальных и касательных напряжений.

Эпюры напряжений построим в сечении В. Нормальные напряжения при изгибе линейно зависят от расстояния до оси балки, принимая в точке 3 значение 83,3 МПа.

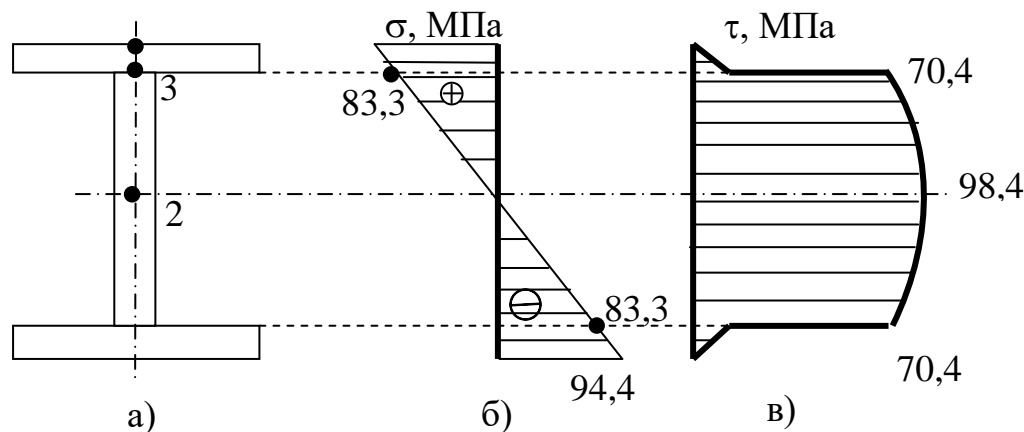


Рис.6.6

У верхней и нижней кромок сечения напряжения равны:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x} = \frac{90 \cdot 10^3}{953 \cdot 10^{-6}} = 94,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = 94,4 \text{ МПа.}$$

На рис.6.6б показана эпюра нормальных напряжений σ . Поскольку момент в опасном сечении отрицательный, верхняя часть сечения находится в растянутом состоянии, т.е. напряжения положительны.

Формула Журавского достоверно описывает распределение напряжений лишь в стенке двутавра, поэтому приведенная на рис.6.6в эпюра τ построена для центральной части сечения.

Наибольшего значения 98,4 МПа касательное напряжение достигает на оси сечения.

6.4. Расчет рамы на прочность

В сечениях стержней плоской рамы возникают только три внутренних усилия: продольная сила N , поперечная сила Q , изгибающий момент M относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба (плоскости нагружения) рамы. Поэтому в плоских рамах строят три эпюры – N , Q и M .

Правила знаков для нормальных и поперечных сил остаются такими же, как в балках. Правило знаков для изгибающего момента обычно не вводят, но ординаты эпюры M откладывают со стороны сжатых волокон, что позволяет судить по эпюре M о форме изгиба и действии изгибающих моментов.

В рамах следует проводить проверку статического равновесия узлов: сумма моментов, действующих во всех сечениях стержней, составляющих данный узел, равна нулю. Из условия равновесия узла следует правило: если узел соединяет два стержня, то при переходе через него момент не изменяется (или изменяется на величину внешнего сосредоточенного момента, приложенного к этому узлу).

Расчет рам на прочность обычно производится с учетом напряжений только от изгибающего момента $\sigma_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_x} \leq [\sigma]$.

Влияние продольной силы, как правило, несущественно. Оценить степень влияния напряжений от продольной силы можно, вычислив их по известной формуле $\sigma = \frac{N}{F}$ и сравнив с напряжением от момента $|M|_{max}$. При необходимости сечение рамы следует увеличить так, чтобы выполнялось условие прочности $|\sigma|_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_x} + \frac{|N|}{F} \leq [\sigma]$, где N берется в том же сечении, где действует $|M|_{max}$.

Пример расчета рамы на прочность

Для заданной плоской рамы из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать двутавровое сечение ($[\sigma]=160$ МПа).

1. Вычертим в масштабе расчетную схему рамы с указанием численных значений заданных величин (рис.6.7а).

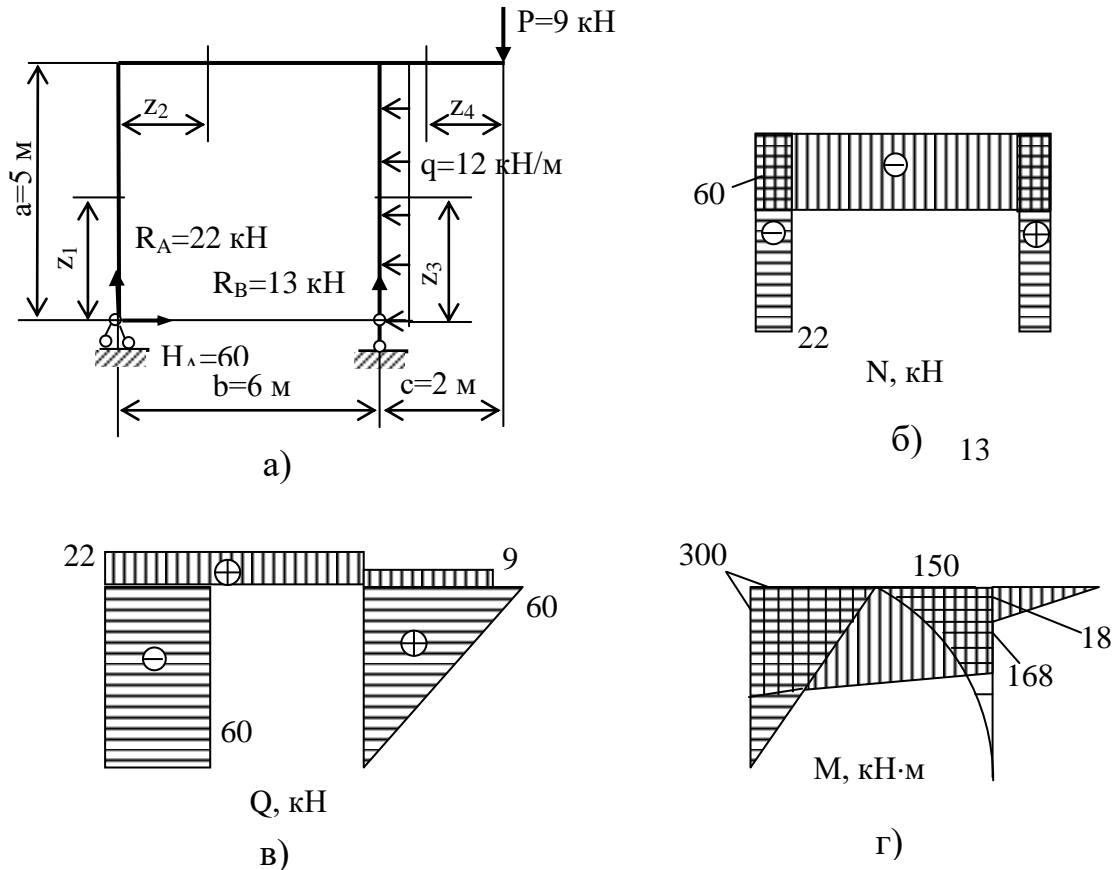


Рис.6.7

2. Запишем уравнения равновесия рамы и определим опорные реакции:

$$\sum X = 0: H_A - q \cdot a = 0, H_A = q \cdot a = 12 \cdot 5 = 60 \text{ кН};$$

$$\sum M_A = 0: R_B \cdot b + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - P(b+c) = 0,$$

$$R_B = \frac{-12 \cdot 5 \cdot 2,5 + 9 \cdot 8}{6} = -13 \text{ кН}; \sum Y = 0: R_A + R_B - P = 0, R_A = -R_B + P = 13 + 9 = 22 \text{ кН}.$$

Указываем на расчетной схеме величину и фактическое направление всех реакций. При составлении уравнений реакцию R_B направили вверх. Так как реакция R_B получилась отрицательной ее направление на расчетной схеме необходимо сменить на противоположное, т.е. вниз.

3. Выделим на расчетной схеме четыре участка. Запишем для каждого из них выражения внутренних усилий и найдем их значения на границах участков.

1.

$$0 \leq z_1 \leq 5 \text{ м}$$

$$N = -R_A = -22 \text{ кН}$$

$$Q = -H_A = -60 \text{ кН}$$

$$M = -H_A \cdot z_1 = -60 \cdot z_1;$$

$$M(0) = 0; M(5) = -300 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

2.

$$0 \leq z_2 \leq 6 \text{ м}$$

$$N = -H_A = -60 \text{ кН}$$

$$Q = R_A = 22 \text{ кН}$$

$$M = R_A \cdot z_2 - H_A \cdot 5 = 22 \cdot z_2 - 300;$$

$$M(0) = -300 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M(6) = -168 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

3.

$$0 \leq z_3 \leq 5$$

$$N = R_B = 13 \text{ кН}$$

$$Q = q \cdot z_3 = 12 \cdot z_3;$$

$$Q(0) = 0; Q(5) = 60 \text{ кН}$$

$$M = -q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2} = -6z_3^2;$$

$$M(0) = 0; M(5) = -150 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

4.

$$0 \leq z_4 \leq 2$$

$$N = 0$$

$$Q = P = 9 \text{ кН}$$

$$M = -P \cdot z_4 = -9z_4; M(0) = 0;$$

$$M(2) = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}$$

Строим эпюры N (рис.6.7б), Q (рис.6.7в), M (рис.6.7г). Положительные ординаты N и Q на ригале откладываем вверх, на стойках – снаружи рамы. Эпюру M строим на сжатых волокнах.

Указание: расчетную схему рамы и эпюры N, Q, M разместить на одном листе.

4. Подбираем номер двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям от максимального изгибающего момента $|M|_{\max}=300 \text{ кН} \cdot \text{м}$,
 $W_x \geq \frac{|M|_{\max}}{[\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{160} \cdot 10^6 = 1875 \text{ см}^3$. Назначаем двутавр № 55, у которого $W_x=2035 \text{ см}^3$, а площадь сечения $F=118 \text{ см}^2$.

5. Проверим прочность выбранного двутавра с учетом действия продольной силы в наиболее опасном сечении (ригель при $z_2=0$), где $M=300$ кН·м, а $N=60$ кН.

$$\sigma_{max} = \frac{|M|_{max}}{W_x} + \frac{|N|_{max}}{F} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{2035 \cdot 10^{-6}} + \frac{60 \cdot 10^{-3}}{118 \cdot 10^{-4}} = 147,4 + 5,1 = 152,5 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа}$$

Как видим, нормальные напряжения от продольной силы составляют 3,47 % от напряжений, возникающих под действием изгибающего момента и поэтому, как правило, могут не учитываться.

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ № 6

Расчет балки на прочность по нормальным напряжениям

Для заданной балки из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры различных по форме поперечных сечений: двутавра, прямоугольника (с отношением сторон $h/b = 2$), квадрата, круга, кольца (при $d/D=0,7$) и оценить их рациональность.

Схемы балок и численные данные выбираются в соответствии с шифром из рис. 6.8 и таблицы 6.1.

Материал балки: сталь ст.3 – $[\sigma]=160$ МПа.

Таблица 6.1

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я
	схема	b, м	a, м	P, кН	q, кН/м	M, кН·м
1	1	4,2	1,2	12	10	25
2	2	4,5	1,4	14	12	20
3	3	5,0	1,6	16	15	15
4	4	5,5	1,8	18	16	10
5	5	6,0	1,7	20	18	12
6	6	5,8	1,5	22	20	14
7	7	5,4	1,3	24	22	16
8	8	5,2	1,1	26	24	18
9	9	4,8	1,0	28	25	22
0	10	4,6	1,9	30	14	24

Содержание и порядок выполнения задачи:

1. Вычертить в масштабе схему балки с указанием численных значений всех заданных величин.
2. Составить уравнения поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x на всех участках балки и построить их эпюры.
3. Произвести проверку эпюр с помощью дифференциальных зависимостей между q , Q_y и M_x .
4. Определить размеры указанных сечений балки их условия прочности по нормальным напряжениям.
5. Вычислить площади подобранных сечений и оценить их рациональность.
6. Построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении балки (для двутавра и кольца).

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ № 7

Расчет на прочность двутавровой балки

Для заданной стальной балки ($[\sigma]=160$ МПа) определить номер двутавра по ГОСТ 8329-72 из условий прочности по нормальным и касательным напряжениям.

Схемы балки и численные данные выбираются в соответствии с шифром из рис. 6.9 и таблицы 6.2.

Таблица 6.2

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я
	Схема	l , м	a , м	b , м	P , кН	q , кН/м
1	1	2,0	0,20	0,60	200	400
2	2	2,2	0,25	0,55	220	450
3	3	2,4	0,30	0,50	240	500
4	4	2,6	0,35	0,45	260	550
5	5	2,8	0,40	0,40	280	600
6	6	3,0	0,45	0,35	300	650
7	7	3,2	0,50	0,30	290	420
8	8	3,4	0,15	0,25	270	440
9	9	3,5	0,10	0,20	250	460
0	10	3,5	0,55	0,15	230	480

Содержание и порядок выполнения задачи:

1. Вычертить схему балки в масштабе, указать численные значения заданных величин.
2. Составить уравнения равновесия и определить реакции опор.
3. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов по участкам и построить их эпюры.
4. Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать номер двутавра.
5. Произвести проверку прочности по максимальным касательным напряжениям и при необходимости увеличить номер двутавра.
6. Построить эпюры нормальных и касательных напряжений в опасных сечениях балки.
7. Проверить прочность балки по главным напряжениям, используя четвертую теорию прочности.

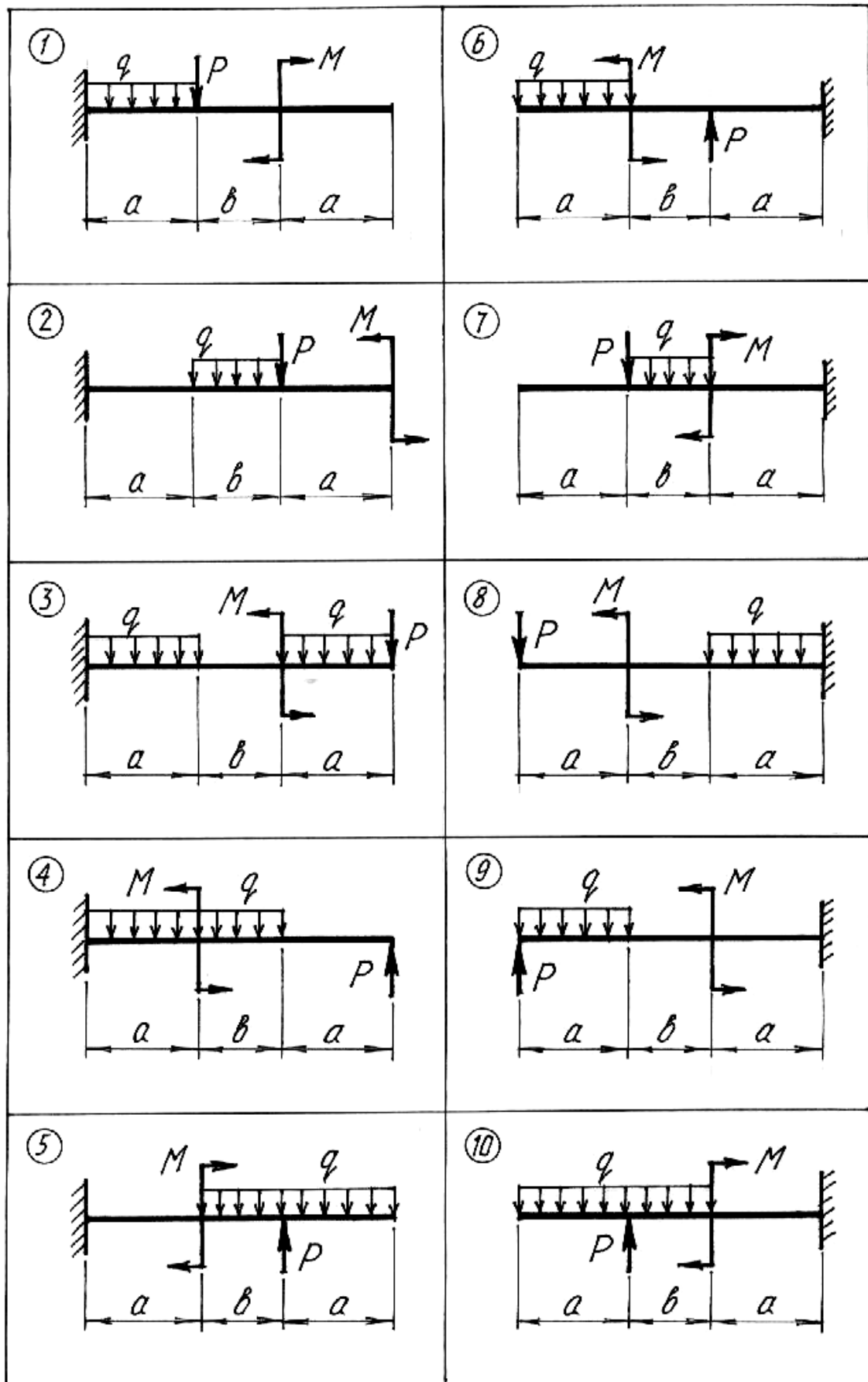


Рис. 6.9

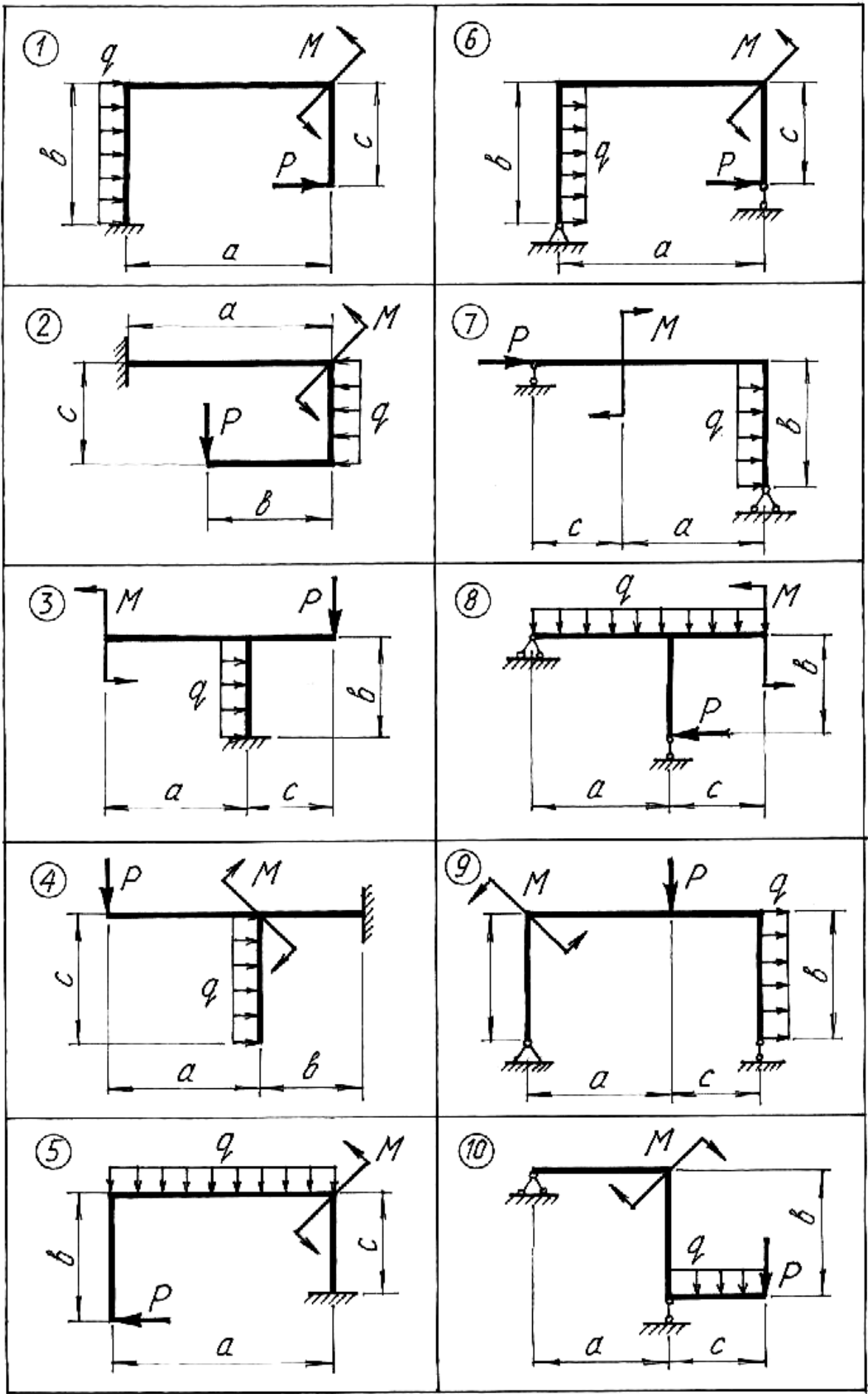


Рис. 6.10

ЗАДАНИЕ ДЛЯ КУРСОВОЙ РАБОТЫ № 8

Расчет рамы на прочность

Для заданной плоской рамы из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать двутавровое сечение ($[\sigma]=160$ МПа).

Схема рамы и численные данные выбираются в соответствии с шифром из рис. 6.10 и таблицы 6.3.

Таблица 6.3

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	
	Схема	a, м	b, м	c, м	q, КН/м	P, кН	M, кН·м
1	1	2,0	2,0	1,0	26	80	15
2	2	2,2	2,1	1,5	24	100	20
3	3	2,4	2,2	2,0	22	120	25
4	4	2,6	2,3	2,5	20	140	30
5	5	2,8	2,4	3,0	18	160	35
6	6	3,0	2,5	3,5	16	180	40
7	7	3,2	2,6	4,0	14	200	22
8	8	3,4	2,7	4,5	12	220	24
9	9	3,6	2,8	5,0	10	240	26
0	10	3,8	2,9	5,5	28	260	28

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить в масштабе схему рамы с указанием численных значений заданных величин.
2. Определить реакции опор.
3. Составить по участкам уравнения продольных сил N , поперечных сил Q_y , изгибающих моментов M_x и построить их эпюры.
4. Подобрать номер двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям с учетом только изгибающего момента.
5. Оценить влияние продольных и поперечных сил на прочность рамы.

Вопросы для самопроверки.

1. Что называется изгибом, балкой, рамой?
2. Какие внутренние силовые факторы возникают в балках, рамах?
3. Правило знаков для внутренних силовых факторов.
4. Дифференциальные зависимости при изгибе.
5. Как определяются нормальные и касательные напряжения от соответствующих силовых факторов.
6. Как проводится расчет на прочность с учетом возникающих в сечении поперечных сил и изгибающих моментов?

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 2000.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.А. Баумана, 1999.,2000
3. Скопинский В.Н. Сопротивление материалов: учеб. пособие. В 2-х ч. – М.: МГТУ, 2002.
4. Саргсян, А.Е. Сопротивление материалов, теория упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчетов : учебник для вузов / А.Е. Саргсян. - 2-е изд., испр. и доп. - М. : Высшая школа, 2000. - 286 с.
5. Сопротивление материалов [электронный ресурс]: учеб. пособие / Н.Н. Вассерман, А.П. Жученков, М.Л. Зинштейн, А.М. Ханов-Издательство ПНИПУ, 2011.-Режим доступа: <http://lib.pstu.ru/elib>
6. Сопротивление материалов [электронный ресурс]: учеб. пособие / А. А. Балакирев, Н. Н. Вассерман, Т. Э. Римм, Ю. П. Сметанников, М. Л. Зинштейн-Издательство ПНИПУ, 2007 Режим доступа: <http://lib.pstu.ru/elib>
7. Сопротивление материалов: курс лекций [электронный ресурс]/А.А. Балакирев, Т.Э. Римм- Издательство ПНИПУ, 2012 Режим доступа: <http://lib.pstu.ru/elib>
8. Жученков, А.П. Сопротивление материалов : конспект лекций : учеб. пособие / А.П. Жученков, М.Л. Зинштейн, А.М. Ханов. – Пермь :Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2014. – 216 с. Режим доступа: <http://lib.pstu.ru/elib>
9. Мельникова Т.Е. Сопротивление материалов: учебно-методическое пособие / Т.Е. Мельникова, Т.В. Чернова.- Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2008. Режим доступа: <http://lib.pstu.ru/elib>
10. Чернова Т.В. Сопротивление материалов. Примеры решения типовых задач: учеб.-метод. пособие / Т.В. Чернова. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2015. – 96 с.- Режим доступа: <http://elib.pstu.ru/docview/?id=2746.pdf>
11. Чернова Т.В. Сопротивление материалов. Статические прочностные расчеты: учеб.-метод. пособие / Т.В. Чернова. – Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2015. – 112 с.- Режим доступа: <http://elib.pstu.ru/docview/?id=2506.pdf>