И.Т.Мухаметьянов

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ И ТЕОРИИ АВТОМАТОВ

Методические рекомендации
по написанию курсовой работы
по дисциплине
«Дискретная математика и теория автоматов»
для студентов дневного отделения направления
09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,
ЛФ ПНИПУ

Лысьва, 2017 г.

Учебное пособие содержит рекомендации по выполнению курсовой работы по дисциплине «Дискретная математика и теория алгоритмов» для студентов направления «Информатика и вычислительная техника» ЛФ ПНИПУ. Приведенные темы для курсового проектирования составлены с ориентацией на основные темы дискретная математика и предполагают углубление знаний по этим темам. Пособие рассчитано на студентов.

Составил профессор кафедры ЕН ПНИПУ Мухаметьянов И.Т.

Рассмотрено на заседании кафедры ЕН ПНИПУ

Зав кафедрой ЕН, к.ф.-м.н.

____________________________И.Т.Мухаметьянов

Методические указания рассмотрены и одобрены на заседании кафедры Естественнонаучных дисциплин «14» сентября 2016 г, протокол № 2.

Оглавление

1. Цели и задачи курсовой работы

Курсовая работа предназначена для отработки и развития навыков, полученных при изучении различных дисциплин, в частности, при решении задач дискретной математики и теории автоматов.

Цель курсовой работы – закрепление и углубление знаний, полученных при изучении студентами курса «Дискретная математика и теория алгоритмов», развитие профессиональных навыков в постановке и решении задач дискретной математики с уклоном в теорию множеств (отношения на множествах), начальных сведений из теории чисел и теории графов. Другая цель курсовой работы – совершенствование навыков работы с учебной и специальной литературой. Наконец, оформление документации на собственную разработку – третья цель курсовой работы. Реализация этой цели также преследует развитие умений и навыков набора специальных текстов. В частности, математических с использованием редактора Word с приложением Equation.

Выполнение работы требует от студента творческого подхода, всестороннего исследования решаемой задачи. Обязательным условием выполнения курсовой работы в срок является строгая дисциплина. Необходимо четко и полно выполнять этапы разработки программ, придерживаться методических рекомендаций и укладываться в сроки, указанные в графике выполнения курсовой работы.

Таким образом, выработка умения рационально распределять время, отведенное на выполнение курсовой работы, также является одной из основных задач курсовой работы.

2. Темы курсовых работ. Постановка задачи

Прежде, чем сформулировать темы курсовых работ, приведём общую постановку их тематики. Необходимые понятия приведены в [1] и [2]. Студенту, желающему продвинуться по теме дальше, дополнительно рекомендуем [3] и [4].

Пусть $\boldsymbol{m}$ – натуральное число такое, что $\boldsymbol{m}$–1 делится на 3, $\boldsymbol{r}$ – такое, целое, что $1<\boldsymbol{r}<\boldsymbol{m}$, $(\boldsymbol{r}-1, \boldsymbol{m})=1$, $\boldsymbol{r}^3\equiv 1 (\mathrm{mod}\ \boldsymbol{m})$ и классы вычетов $\bar{1}, -\bar{1}, \bar{\boldsymbol{r}}, -\bar{\boldsymbol{r}}, \overline{\boldsymbol{r}^2}, -\overline{\boldsymbol{r}^2}$ по mod $\boldsymbol{m}$ попарно не совпадают. Рассмотрим граф $\boldsymbol{\Gamma}$ с множеством вершин $\mathbf{Z}_m=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \overline{\boldsymbol{m}-1}\}$, вершины $\bar{\boldsymbol{x}}$ и $\bar{\boldsymbol{y}}$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}}\in\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{\boldsymbol{r}}, -\bar{\boldsymbol{r}}, \overline{\boldsymbol{r}^2}, -\overline{\boldsymbol{r}^2}\}$.

Задание 1. Изобразить граф $\boldsymbol{\Gamma}$.

Задание 2. Найти массив пересечений графа $\boldsymbol{\Gamma}$.

Аналогично, пусть $\boldsymbol{m}$ – как и выше, натуральное число, но такое, что $\boldsymbol{m}$–1 делится на 4, $\boldsymbol{r}$ – такое, целое, что $1<\boldsymbol{r}<\boldsymbol{m}$, $(\boldsymbol{r}-1, \boldsymbol{m})=1$, $\boldsymbol{r}^4\equiv 1 (\mathrm{mod}\ \boldsymbol{m})$ и классы вычетов $\bar{1}$, $-\bar{1}$, $\bar{\boldsymbol{r}}$, $-\bar{\boldsymbol{r}}$ по mod $\boldsymbol{m}$ попарно не совпадают, $\boldsymbol{\Gamma}$ – граф с тем же множеством вершин, как и выше, но вершины $\bar{\boldsymbol{x}}$ и $\bar{\boldsymbol{y}}$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $\bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{y}}\in\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{\boldsymbol{r}}, -\bar{\boldsymbol{r}}\}$. Задания те же, что и выше.

Общая часть тем курсовых работ формулируется одинаково:

О регулярных графах степени *k* на множестве классов вычетов по модулю числа *m*

Каждому студенту предлагается свой вариант. Варианты отличаются значениями третьей и четвёртой пар (***m***, ***k***). Причём каждому студенту предлагается рассмотреть четыре варианта пар (***m***, ***k***), две из которых общие. Поэтому полностью тема курсовой работы формулируется в зависимости от значений третьей и четвёртой пар (***m***, ***k***). Исходные данные для вариантов приводятся в следующей таблице:

№ в-та	(m, k)	№ в-та	(m, k)
1	(17, 4), (19, 6), (97, 4), (25, 6)	9	(17, 4), (19, 6), (97, 6), (21, 4)
2	(17, 4), (19, 6), (89, 4), (28, 6)	10	(17, 4), (19, 6), (79, 6), (25, 4)
3	(17, 4), (19, 6), (73, 4), (34, 6)	11	(17, 4), (19, 6), (73, 6), (33, 4)
4	(17, 4), (19, 6), (61, 4), (40, 6)	12	(17, 4), (19, 6), (67, 6), (45, 4)
5	(17, 4), (19, 6), (53, 4), (46, 6)	13	(17, 4), (19, 6), (61, 6), (49, 4)
6	(17, 4), (19, 6), (41, 4), (49, 6)	14	(17, 4), (19, 6), (43, 6), (57, 4)
7	(17, 4), (19, 6), (37, 4), (55, 6)	15	(17, 4), (19, 6), (37, 6), (65, 4)
8	(17, 4), (19, 6), (29, 4), (58, 6)	16	

Так, тема курсовой работы варианта №1 формулируется так:

О регулярных графах степени k
на множестве классов вычетов по модулю числа m,
$(m, k) \in \{(17, 4), (19, 6), (97, 4), (25, 6)\}$

В зависимости от величины значений m находится объём работы. Поэтому при оценке работы учитывается её объём. При достаточно больших m объём работы может оказаться настолько большим, что поставленные задачи не будут решены полностью. Это допустимо. Главное – результат в целом.

3. Методические рекомендации по оформлению курсовой работы.

1. Каждый студент выполняет работу согласно выбранного варианта и оформляет отчет по выполненной работе. Номер варианта курсовой работы совпадает с номером варианта заданий индивидуальной работы по дисциплине.

2. Работа оформляется на листах формата А4, шрифтом 14 пунктов, полуторный интервал в текстовом процессоре Word или $\TeX$, и распечатывается.

3. Работа должна иметь титульный лист с указанием института, факультета, темы, автора, руководителя, города, года.

4. Работа должна иметь содержание с указанием страниц по темам

5. Работа должна иметь введение, в которой формулируется постановка задачи, и заключение, в которой автор указывает, какие задачи в каком объёме решены, и что не удалось решить.

6. Содержательная часть работы состоит из следующих частей:

а) Теоретическая часть (в которой излагаются теоретические положения, на которые опирается курсовая работа);

б) Примеры применения теоретических положений на конкретных задачах; а именно, примеры из **Приложения 1** с восполнением целых фрагментов для самостоятельного завершения (указываются в скобках в виде замечаний типа «проделать самостоятельно!»), а также для $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k}) \in \{(17, 4), (19, 6)\}$.

в) Основная часть (в которой излагается решение поставленной задачи для своего варианта).

7. Далее следуют заключение и список литературы, оформленный по правилам.

8. В конце работы следует оставить 2 – 3 чистых листа для рецензии преподавателя и работы над ошибками.

9. Курсовые работы, в которых не соблюдены указанные требования, а также работы, выполненные не по своему варианту, не проверяются.

10. Курсовая работа должна быть представлена в двух экземплярах (дополнительный экземпляр предназначается для продолжения работы над темой последующими студентами).

4. Защита курсовой работы

При защите курсового проекта студент должен знать теоретический материал, изложенный в данной работе, а также уметь практически показать все приемы работы, используемые при выполнении курсовой работы.

После получения курсового проекта с замечаниями преподавателя нужно исправить все ошибки и внести требуемые дополнения. Все исправления и дополнения должны быть сделаны на отдельных листах в конце работы с указанием ссылок на номер листа.

В случае если работа не зачтена, следует в кратчайший срок устранить все замечания и предоставить работу на рецензию повторно. Зачтенные курсовые работы с исправленными ошибками предоставляются преподавателю на экзамене (зачете).

5. График выполнения курсовой работы.

№ п/п	Неделя семестра (после получения задания)	Этап курсовой работы	контроль
1	1 – 5	Осмысливание задачи, теоретического материала, примеров	Консультация, 2-я аттестация
2	6 – 8	Написание вводной и теоретической части, выполнение расчётов, решение первой из поставленных задач	2-я аттестация
3	9 – 11	Решение второй из поставленных задач	3-я аттестация
4	12, 13	Оформление отчета по выполнению курсовой работы.	3-я аттестация
7	14, 15	Защита курсовой работы	Оценка за курсовую

Приложения

Приложение 1. Примеры решения задачи для некоторых значений m и k.

Примеры. **1**. Пусть m=4. Рассмотрим сравнение $r^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, где $1<r<4$, $(r-1, 4)=1$.

Пусть r=2. Тогда $r^3=2^3-1=7$ не делится на 4. Кратко это будем писать так:

$$r=2 \Rightarrow r^3=2^3=8\not\equiv 1(\mathrm{mod}4).$$

Вообще, заметим, что r не может быть чётным.

$$r=3 \Rightarrow r^3=3^3=27\not\equiv 1(\mathrm{mod}4).$$

Таким образом, такого числа r, что $1<r<4$, $(r-1, 4)=1$ и $r^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ 4)$, не существует.

2. Пусть m=7. Имеем

$$r=2 \Rightarrow r^3=2^3=8\equiv 1(\mathrm{mod}7).$$

При этом $(r-1, 7)=(2-1, 7)=1$.

Таким образом, r=2 и $K=\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{r}, -\bar{r}, \overline{r^2}, -\overline{r^2}\}$ (всюду ниже множество $\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{r}, -\bar{r}, \overline{r^2}, -\overline{r^2}\}$ будем обозначать через K). Так как $-\bar{1}=\bar{6}$, $-\bar{r}=-\bar{2}=\bar{5}$, $\overline{r^2}=\bar{4}$, $-\overline{r^2}=-\bar{4}=\bar{3}$, то $K=\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$. Так как $\bar{0}-\bar{y}=-\bar{y}=K$, для всех $\bar{y}\neq\bar{0}$, то все ненулевые элементы из $\mathbf{Z}_7=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$ лежат в $[\bar{0}]$.

Лемма 1. *Если* $3 \mid m-1$, *то для любой вершины* $\bar{x}\in\mathbf{Z}_m$ *графа* $\mathbf{\Gamma}$ *имеет место равенство* $[\bar{x}]=\{\bar{x}+\bar{1}, \bar{x}-\bar{1}, \bar{x}+\bar{r}, \bar{x}-\bar{r}, \bar{x}+\overline{r^2}, \bar{x}-\overline{r^2}\}$. В частности, *для любой вершины графа* $\mathbf{\Gamma}$ *имеем* $\deg\bar{x}=6$, то есть *граф* $\mathbf{\Gamma}$ *– регулярный степени* 6.

Доказательство. Напоминаем, что в графе $\mathbf{\Gamma}$ вершины $\bar{x}$ и $\bar{y}$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $\bar{x}-\bar{y}\in K=\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{r}, -\bar{r}, \overline{r^2}, -\overline{r^2}\}$.

Пусть $\bar{y}\in\{\bar{x}+\bar{1}, \bar{x}-\bar{1}, \bar{x}+\bar{r}, \bar{x}-\bar{r}, \bar{x}+\overline{r^2}, \bar{x}-\overline{r^2}\}$. Если $\bar{y}=\bar{x}+\bar{1}$, то $\bar{x}-\bar{y}=\bar{x}-(\bar{x}+\bar{1})=-\bar{1}\in K$, и $\bar{y}\in[\bar{x}]$. Если $\bar{y}=\bar{x}-\bar{1}$, то снова $\bar{x}-\bar{y}=\bar{x}-(\bar{x}-\bar{1})=\bar{1}\in K$, то есть $\bar{y}\in[\bar{x}]$. И так далее, приравнивая $\bar{y}$ поочерёдно остальным элементам множества $\{\overline{x}+\overline{1},\ \overline{x}-\overline{1},\ \overline{x}+\overline{r},\ \overline{x}-\overline{r},\ \overline{x}+\overline{r^2},\ \overline{x}-\overline{r^2}\}$, аналогично получаем $\overline{x}-\overline{y}\in \boldsymbol{K}$ (проделать самостоятельно!), то есть $\{\overline{x}+\overline{1},\ \overline{x}-\overline{1},\ \overline{x}+\overline{r},\ \overline{x}-\overline{r},\ \overline{x}+\overline{r^2},\ \overline{x}-\overline{r^2}\}\subseteq[\overline{x}]$.

Обратно, пусть $\overline{y}\in[\overline{x}]$. Это означает, что $\overline{x}-\overline{y}\in \boldsymbol{K}$, то есть $\overline{x}-\overline{y}$ равен одному из элементов из $\boldsymbol{K}$. Если $\overline{x}-\overline{y}=\overline{1}$, то $\overline{y}=\overline{x}-\overline{1}$. Если $\overline{x}-\overline{y}=-\overline{1}$, то $\overline{y}=\overline{x}+\overline{1}$, и так далее. Перебирая всевозможные равенства элемента $\overline{x}-\overline{y}$ элементам из $\boldsymbol{K}$ (проделать!), получим, что $\overline{y}\in\{\overline{x}+\overline{1},\ \overline{x}-\overline{1},\ \overline{x}+\overline{r},\ \overline{x}-\overline{r},\ \overline{x}+\overline{r^2},\ \overline{x}-\overline{r^2}\}$. Это означает, что $[\overline{x}]\subseteq\{\overline{x}+\overline{1},\ \overline{x}-\overline{1},\ \overline{x}+\overline{r},\ \overline{x}-\overline{r},\ \overline{x}+\overline{r^2},\ \overline{x}-\overline{r^2}\}$.

Таким образом, $\{\overline{x}+\overline{1},\ \overline{x}-\overline{1},\ \overline{x}+\overline{r},\ \overline{x}-\overline{r},\ \overline{x}+\overline{r^2},\ \overline{x}-\overline{r^2}\}\subseteq[\overline{x}]$ и, обратно, $[\overline{x}]\subseteq\{\overline{x}+\overline{1},\ \overline{x}-\overline{1},\ \overline{x}+\overline{r},\ \overline{x}-\overline{r},\ \overline{x}+\overline{r^2},\ \overline{x}-\overline{r^2}\}$. Это означает, что $[\overline{x}]=\{\overline{x}+\overline{1},\ \overline{x}-\overline{1},\ \overline{x}+\overline{r},\ \overline{x}-\overline{r},\ \overline{x}+\overline{r^2},\ \overline{x}-\overline{r^2}\}$.

В частности, $|[\overline{x}]|=\deg\overline{x}=6$.

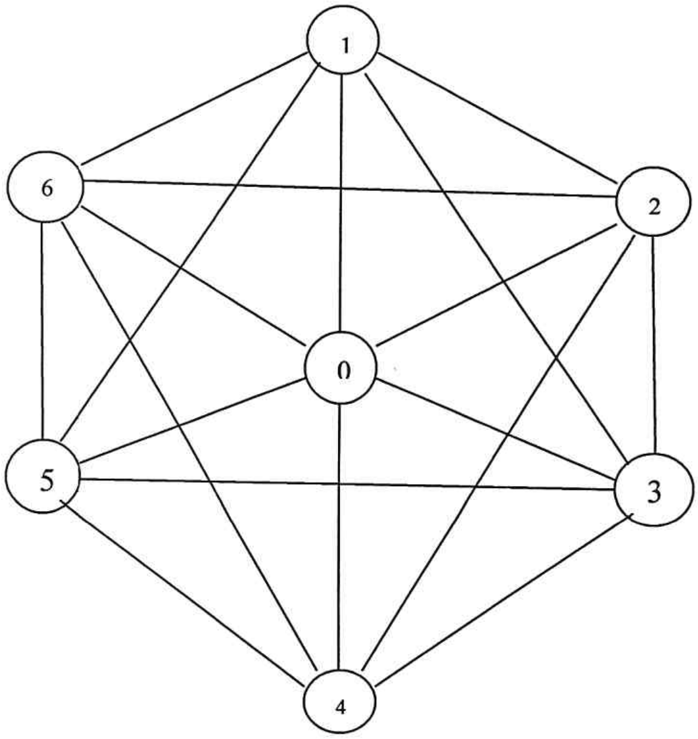
Лемма доказана.

В нашем случае $\boldsymbol{m}=7$ имеем:

$$[\overline{0}]=\{\overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6}\},$$
$$[\overline{1}]=\{\overline{0},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6}\},$$
$$[\overline{2}]=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6}\},$$
$$[\overline{3}]=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{4},\ \overline{5},\ \overline{6}\},$$
$$[\overline{4}]=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{5},\ \overline{6}\},$$
$$[\overline{5}]=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{6}\},$$
$$[\overline{6}]=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{2},\ \overline{3},\ \overline{4},\ \overline{5}\}.$$

Как видим, любая вершина графа $\boldsymbol{\Gamma}$ в своей окрестности содержит все остальные вершины графа. Другими словами, любая пара вершин графа связаны ребром. То есть $\boldsymbol{\Gamma}$ – полный граф: $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{K}_7$. В частности, диаметр $\boldsymbol{d}$ графа равен 1, и массив пересечений – следующий: $\{6;\ 1\}$.

Граф можно изобразить следующим образом:



3. Пусть $\boldsymbol{m}$=10. Имеем

$$r=2 \Rightarrow r^3=2^3=8\not\equiv 1(\bmod 10).$$

Вообще, при $\boldsymbol{m}$ чётном $\boldsymbol{r}$ не может быть также чётным. Поэтому далее перебираем $\boldsymbol{r}$ только нечётные:

$$r=3 \Rightarrow r^3=3^3=27\not\equiv 1(\bmod 10),$$

$$r=5 \Rightarrow r^3=5^3=125\not\equiv 1(\bmod 10),$$

$$r=7 \Rightarrow r^3=7^3=343\not\equiv 1(\bmod 10),$$

$$r=9 \Rightarrow r^3=9^3=729\not\equiv 1(\bmod 10),$$

Таким образом, такого числа $\boldsymbol{r}$, что $1<r<10$, $(r-1, 10)=1$ и $r^3\equiv 1(\bmod 10)$, не существует.

Заметим, что, с одной стороны, если $\boldsymbol{m}$ – чётно, то $r^3\equiv 1(\bmod m)$ возможно только для $\boldsymbol{r}$ нечётных. Но тогда $(r-1, m)\neq 1$. Поэтому $r^3\equiv 1(\bmod m)$ возможно только для нечётных $\boldsymbol{m}$. И мы в дальнейшем рассматриваем только нечётные $\boldsymbol{m}$.

4. Пусть $\boldsymbol{m}$=13. Имеем

$$r=2 \Rightarrow r^3=2^3=8\not\equiv 1(\bmod 13),$$

$$r=3 \Rightarrow r^3=3^3=27\equiv 1(\bmod 13).$$

При этом $(r-1, m)=(2-1, 13)=1$.

Таким образом, r=3 и

$$K=\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{r}, -\bar{r}, \overline{r^2}, -\overline{r^2}\}=\{\bar{1}, \overline{12}, \bar{3}, \overline{10}, \bar{9}, \bar{4}\}.$$

Выпишем окрестность произвольной вершины $\bar{x}$ (по **Лемме 1**):

$$[\bar{x}]=\{\bar{x}+\bar{1}, \bar{x}+\bar{3}, \bar{x}+\bar{4}, \bar{x}+\bar{9}, \bar{x}+\overline{10}, \bar{x}+\overline{12}\}.$$

Поэлементно (для удобства опускаем чёрточки над обозначениями классов):

[0]={1, 3, 4, 9, 10, 12},

[1]={2, 4, 5, 10, 11, 0}={0, 2, 4, 5, 10, 11},

[2]={1, 3, 5, 6, 11, 12},

[3]={2, 4, 6, 7, 12, 0}={0, 2, 4, 6, 7, 12},

[4]={1, 3, 5, 7, 8, 0}={0, 1, 3, 5, 7, 8},

[5]={1, 2, 4, 6, 8, 9},

[6]={2, 3, 5, 7, 9, 10},

[7]={3, 4, 6, 8, 10, 11},

[8]={4, 5, 7, 9, 11, 12},

[9]={5, 6, 8, 10, 12, 0}={0, 5, 6, 8, 10, 12},

[10]={1, 6, 7, 9, 11, 0}={0, 1, 6, 7, 9, 11},

[11]={1, 2, 7, 8, 10, 12},

[12]={2, 3, 8, 9, 11, 0}={0, 2, 3, 8, 9, 11}.

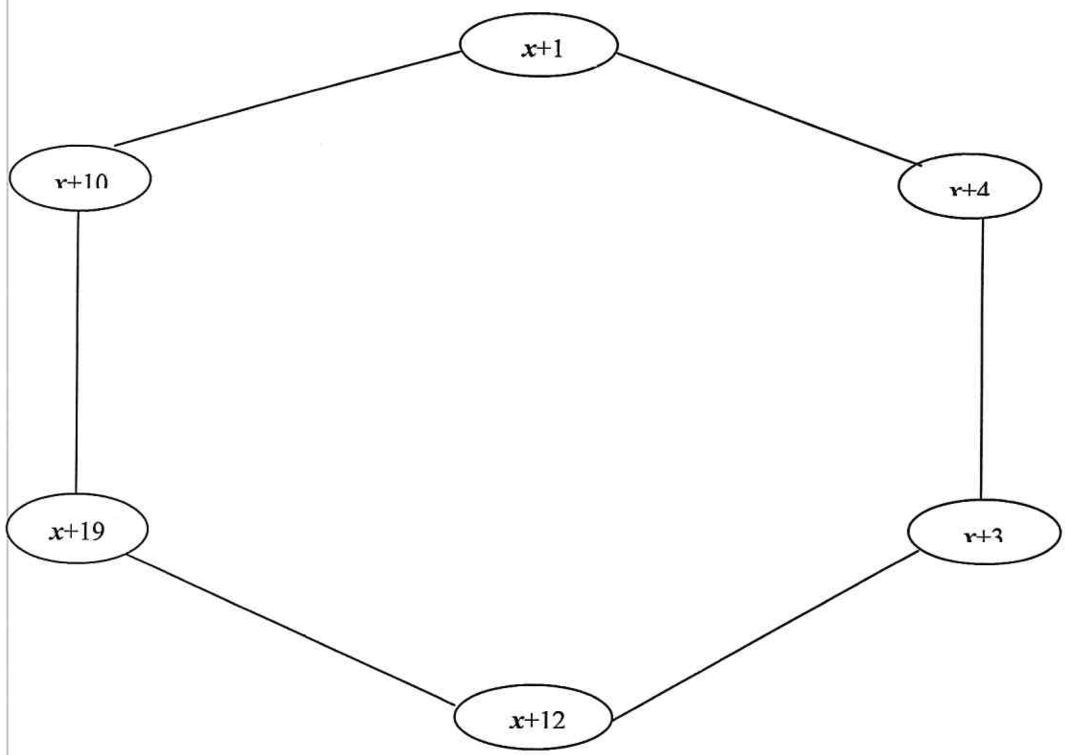
Покажем, что окрестность произвольной вершины $\bar{x}$ представляет собой шестиугольник. Имеем

$$[\bar{x}]=\{\bar{x}+\bar{1}, \bar{x}+\bar{3}, \bar{x}+\bar{4}, \bar{x}+\bar{9}, \bar{x}+\overline{10}, \bar{x}+\overline{12}\}.$$

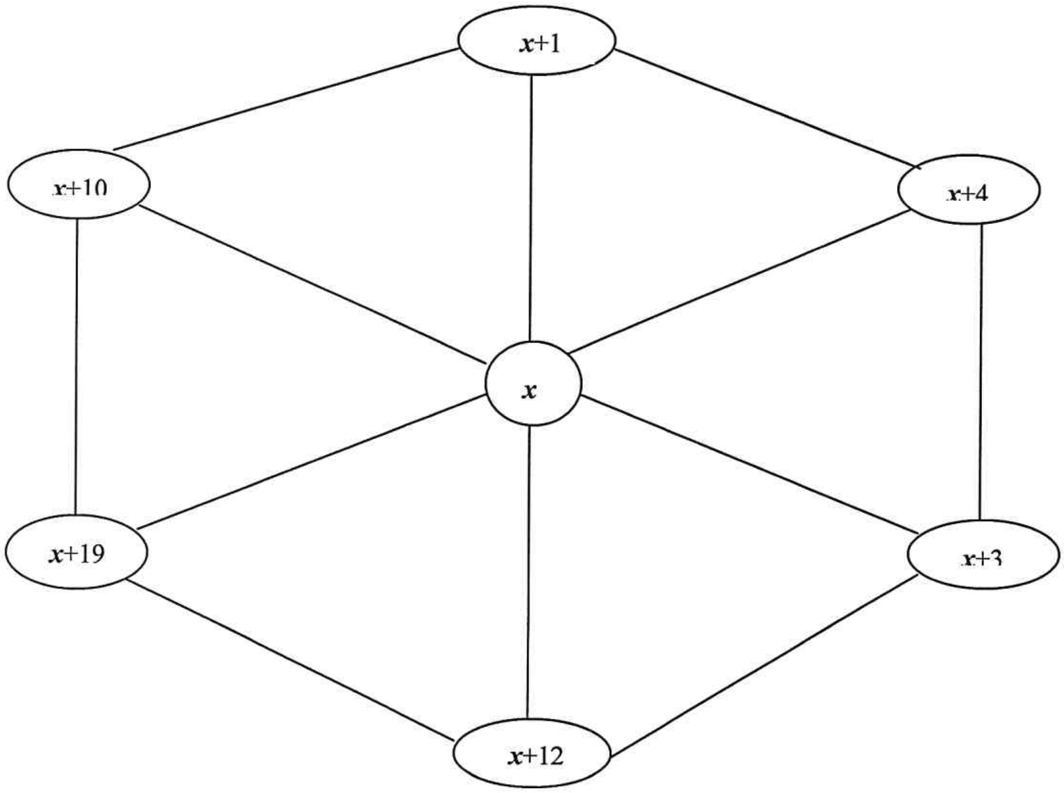
Составим таблицу вычитания $\bar{u}-\bar{v}$ элементов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ из $[\bar{x}]$:

$\bar{u}$ \ v	$\bar{x}+\overline{12}$	$\bar{x}+\overline{10}$	$\bar{x}+\bar{9}$	$\bar{x}+\bar{4}$	$\bar{x}+\bar{3}$	$\bar{x}+\bar{1}$
$\bar{x}+\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{11}$
$\bar{x}+\overline{10}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{9}$
$\bar{x}+\bar{9}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$	$\bar{8}$
$\bar{x}+\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{7}$	$\bar{6}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{x}+\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\overline{12}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{x}+\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\bar{0}$

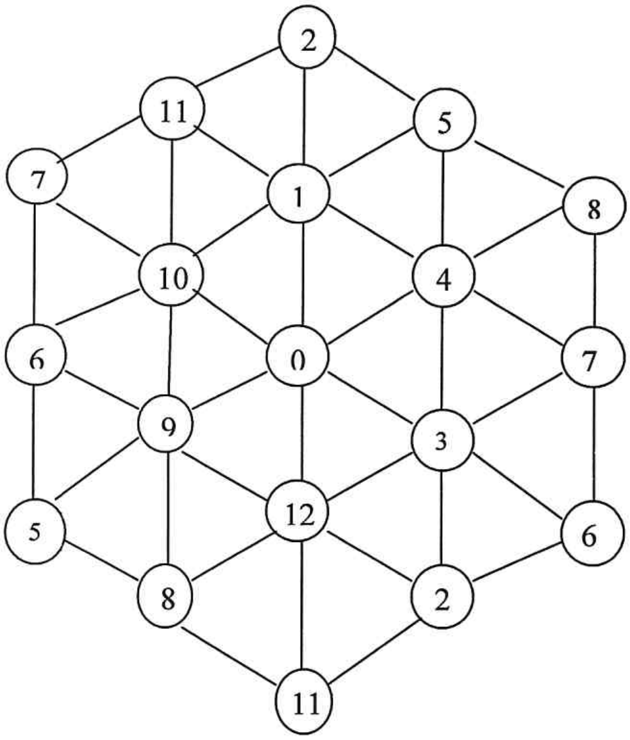
В таблице серым цветом выделены те значения $\bar{u}-\bar{v}$, которые лежат в K. Так, $(\bar{x}+\overline{12})-(\bar{x}+\bar{9})=\bar{3}$ и $(\bar{x}+\overline{12})-(\bar{x}+\bar{3})=\bar{9}$, которые выделены серым цветом. Это означает, что $\overline{x}+\overline{12}$ смежен с $\overline{x}+\overline{9}$ и с $\overline{x}+\overline{3}$. Таким образом, окрестность произвольной вершины $\overline{x}$ представляет собой шестиугольник (для удобства чёрточки над обозначениями классов ниже в рисунках опускаем):



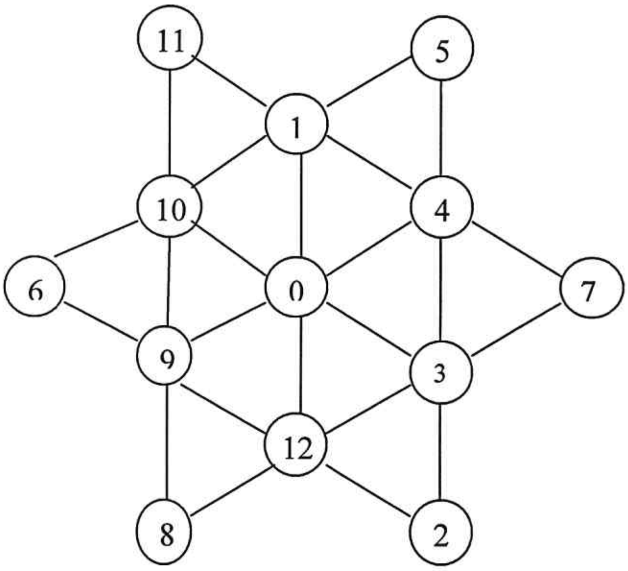
А замкнутая окрестность $\overline{x}^{\perp}=[\overline{x}]\cup\{\overline{x}\}$ вершины $\overline{x}$ – своеобразное колесо:



Изобразим вершины графа со связями в виде плоской сетки, ограничившись вершинами на расстоянии 2 от вершины $\overline{0}$:

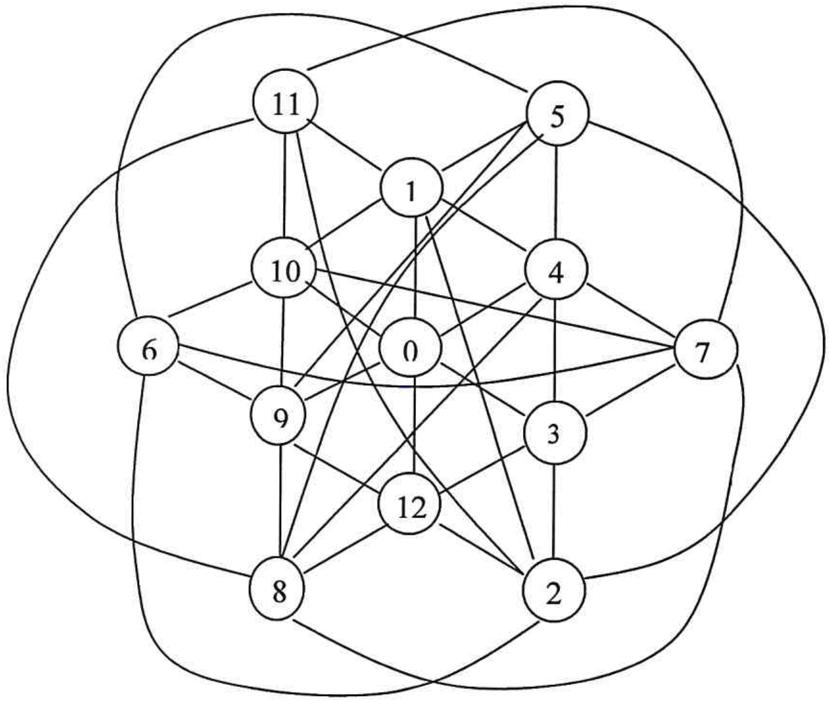


Здесь повторяются вершины $\overline{8}$, $\overline{6}$, $\overline{11}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{2}$. Удалим их:

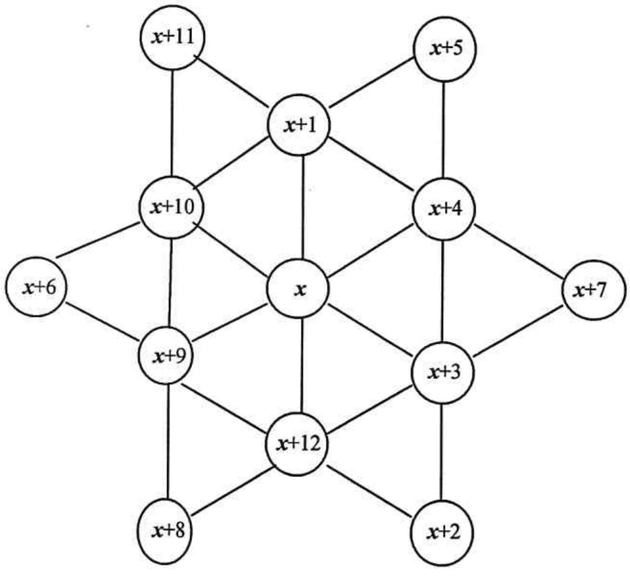


Получилась часть графа, содержащая все вершины графа. Назовём её ***контуром*** (относительно вершины $\overline{0}$).

Дорисуем недостающие рёбра:



Найдём массив пересечений графа. Прежде всего, заметим, что контур графа относительно любой вершины устроен одинаково:



Теперь ясно, что диаметр $\boldsymbol{d}$ графа равен 2: $\boldsymbol{d}$=2.

Если $d(x, y)=1$, то $a_1(x, y)=a_1=\lambda=2$ – постоянное, и граф является рёберно регулярным с параметрами (13, 6, 2). Также $b_1(x, y)=k-\lambda-1=6-2-1=3$.

Если $d(x, y)=2$, то $c_2(x, y)=\mu=2$ – постоянное, и граф является сильно регулярным с параметрами $(v, k, \lambda, \mu)=(13, 6, 2, 2)$.

Массив пересечений – следующий: $\{6, 3; 1, 2\}$.

5. Пусть $\boldsymbol{m}$=19 (напоминаем, что мы рассматриваем только случаи нечётных $\boldsymbol{m}$ с условием 3 | $\boldsymbol{m}$–1). Имеем

$$r=2 \Rightarrow r^3=2^3=8\not\equiv 1(\mathrm{mod}19),$$

$$r=3 \Rightarrow r^3=3^3=27\not\equiv 1(\mathrm{mod}19),$$

$$r=4 \Rightarrow r^3=4^3=64\not\equiv 1(\mathrm{mod}19),$$

$$r=5 \Rightarrow r^3=5^3=125\not\equiv 1(\mathrm{mod}19),$$

$$r=6 \Rightarrow r^3=6^3=216\not\equiv 1(\mathrm{mod}19),$$

$$r=7 \Rightarrow r^3=7^3=343\equiv 1(\mathrm{mod}19).$$

При этом ($\boldsymbol{r}$–1, $\boldsymbol{m}$)=(7–1, 19)=1.

Таким образом, $\boldsymbol{r}$=7 и

$$K=\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{r}, -\bar{r}, \overline{r^2}, -\overline{r^2}\}=\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{7}, -\bar{7}, \overline{7^2}, -\overline{7^2}\}=\{\bar{1}, \overline{18}, \bar{7}, \overline{12}, \overline{49}, -\overline{49}\}=$$

$$=\{\bar{1}, \overline{18}, \bar{7}, \overline{12}, \overline{11}, \bar{8}\}=\{\bar{1}, \bar{7}, \bar{8}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{18}\}.$$

Выпишем окрестность произвольной вершины $\bar{x}$ (по **Лемме 1**):

$$[\bar{x}]=\{\bar{x}+\bar{1}, \bar{x}+\bar{7}, \bar{x}+\bar{8}, \bar{x}+\overline{11}, \bar{x}+\overline{12}, \bar{x}+\overline{18}\}.$$

Поэлементно (как и в предыдущем случае, для удобства опускаем чёрточки над обозначениями классов):

[0]={1, 7, 8, 11, 12, 18},

[1]={2, 8, 9, 12, 13, 0}={0, 2, 8, 9, 12, 13},

[2]={1, 3, 9, 10, 13, 14},

[3]={2, 4, 10, 11, 14, 15},

[4]={3, 5, 11, 12, 15, 16},

[5]={4, 6, 12, 13, 16, 17},

[6]={5, 7, 13, 14, 17, 18},

[7]={6, 8, 14, 15, 18, 0}={0, 6, 8, 14, 15, 18},

[8]={1, 7, 9, 15, 16, 0}={0, 1, 7, 9, 15, 16},

[9]={1, 2, 8, 10, 16, 17},

[10]={2, 3, 9, 11, 17, 18},

[11]={3, 4, 10, 12, 18, 0}={0, 3, 4, 10, 12, 18},

[12]={1, 4, 5, 11, 13, 0}={0, 1, 4, 5, 11, 13},

[13]={1, 2, 5, 6, 12, 14},

[14]={2, 3, 6, 7, 13, 15},

[15]={3, 4, 7, 8, 14, 16},

[16]={4, 5, 8, 9, 15, 17},

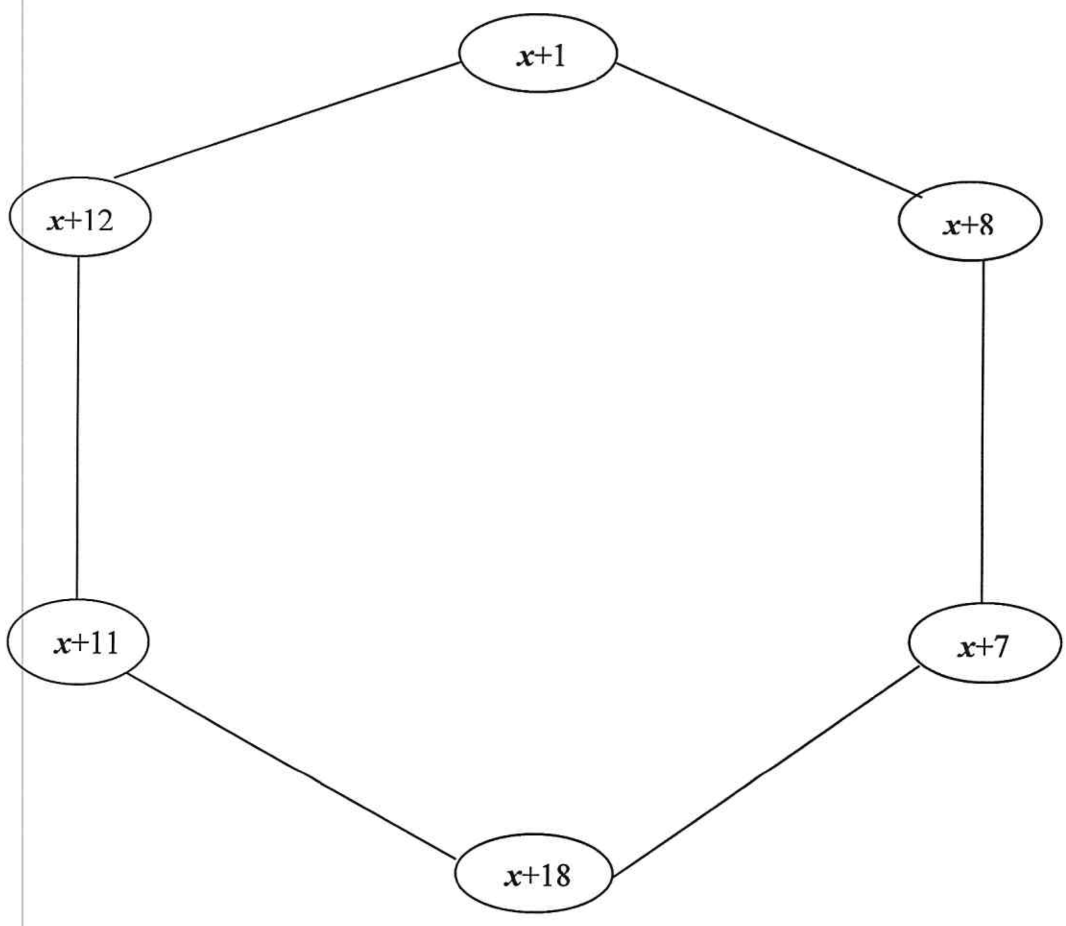
[17]={5, 6, 9, 10, 16, 18},

[18]={6, 7, 10, 11, 17, 0}={0, 6, 7, 10, 11, 17}.

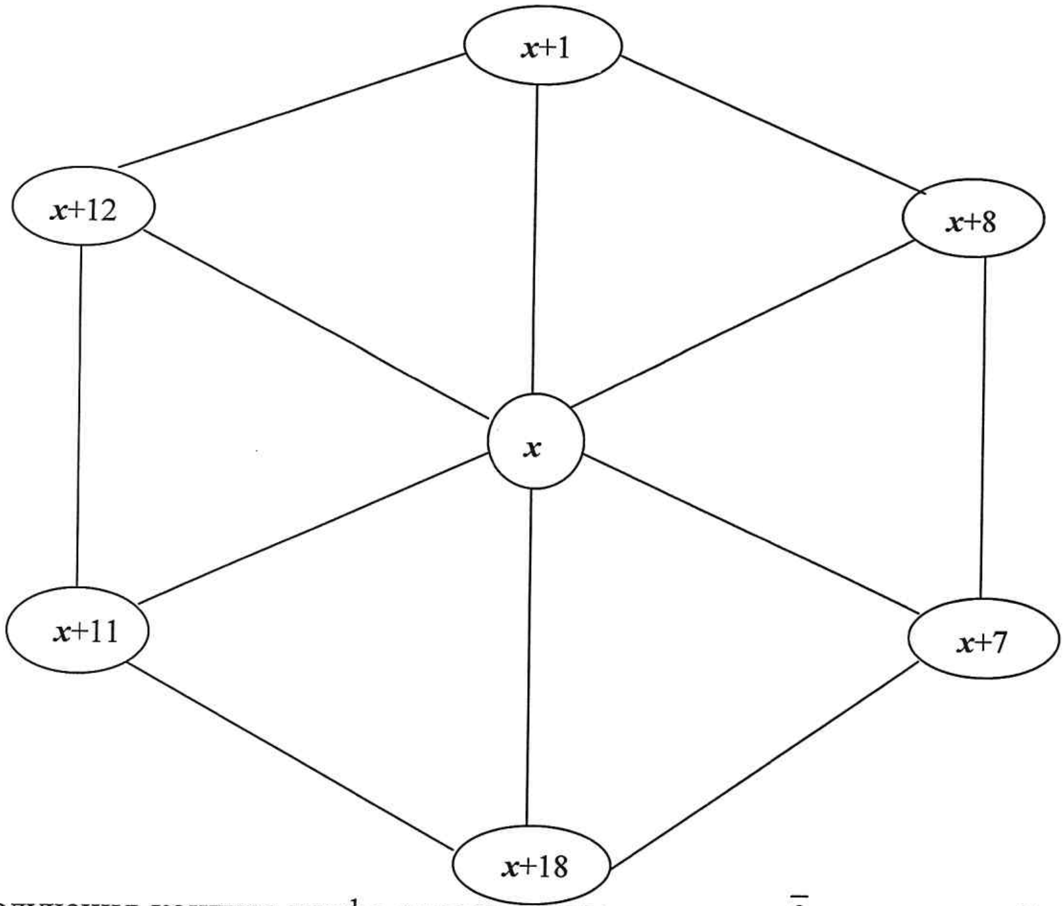
Покажем, что окрестность произвольной вершины $\overline{x}$ представляет собой шестиугольник. Для этого, как и в случае $\boldsymbol{m}$=13, составим таблицу вычитания $\overline{u}-\overline{v}$ элементов $\overline{u}$ и $\overline{v}$ из $[\overline{x}]$:

$\overline{u}$ \ v	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}+\overline{7}$	$\overline{x}+\overline{8}$	$\overline{x}+\overline{11}$	$\overline{x}+\overline{12}$	$\overline{x}+\overline{18}$
$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$	$\overline{12}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$
$\overline{x}+\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{15}$	$\overline{14}$	$\overline{8}$
$\overline{x}+\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{16}$	$\overline{15}$	$\overline{9}$
$\overline{x}+\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{18}$	$\overline{12}$
$\overline{x}+\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{13}$
$\overline{x}+\overline{18}$	$\overline{17}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$

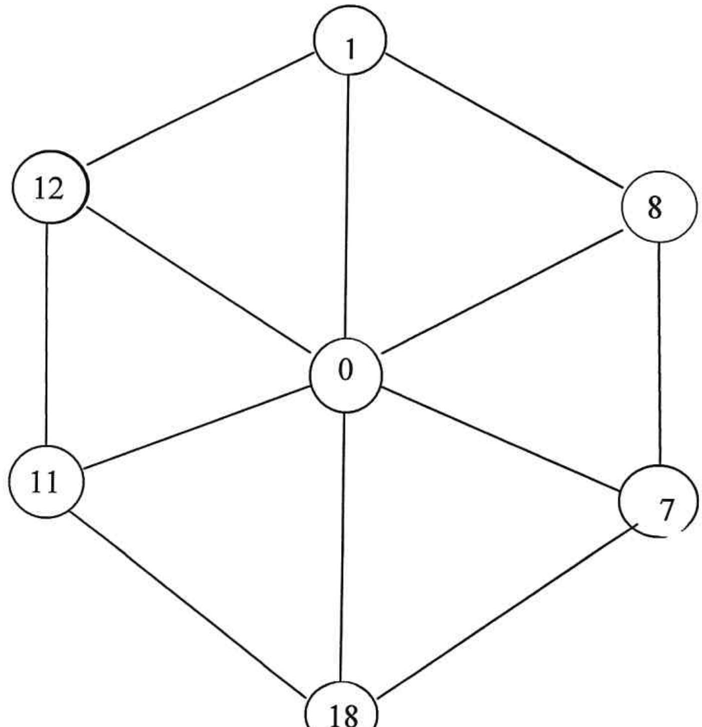
Смысл выделений серым цветом тот же, что и в случае $\boldsymbol{m}$=13. Таким образом, окрестность произвольной вершины $\overline{x}$ представляет собой шестиугольник:



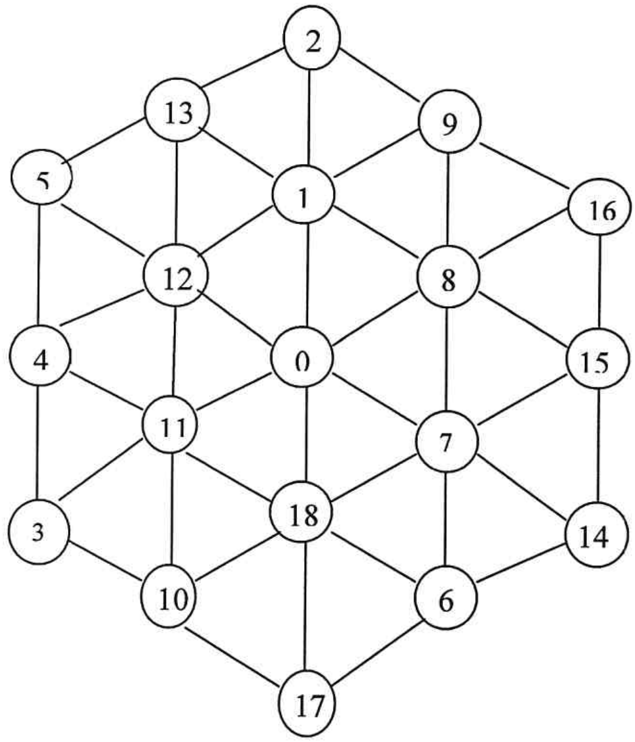
А замкнутая окрестность $\overline{x}^{\perp}=[\overline{x}]\cup\{\overline{x}\}$ вершины $\overline{x}$ – колесо:



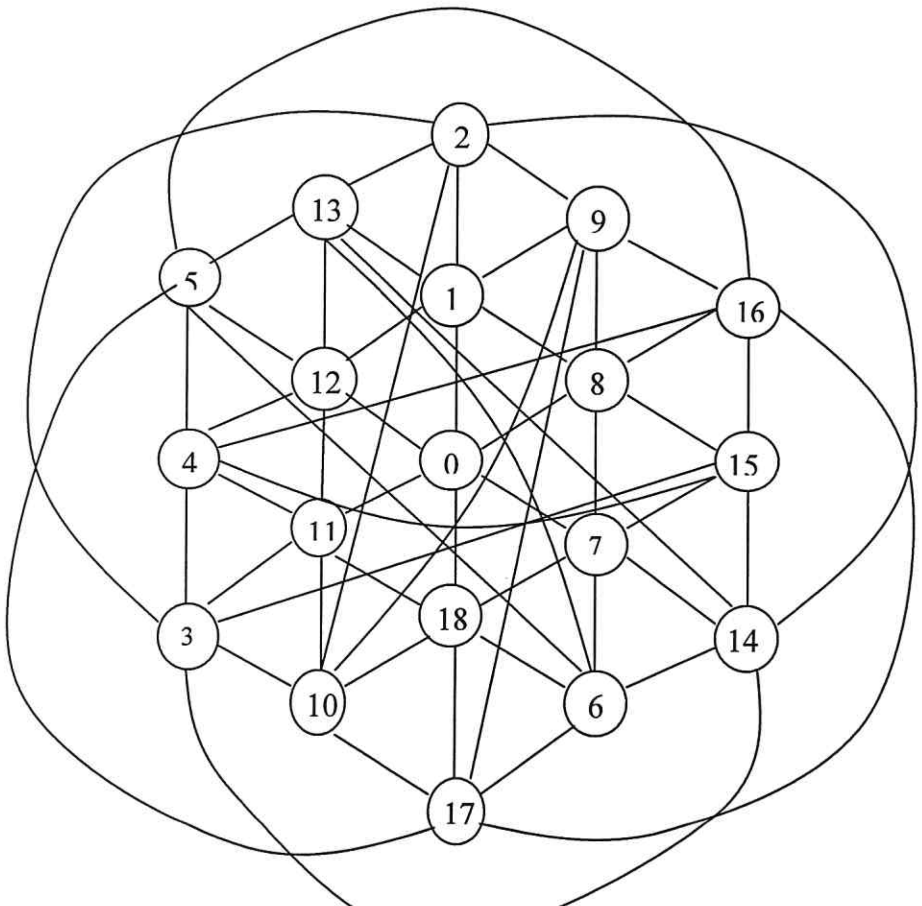
Для получения контура графа относительно вершины $\overline{0}$ сначала изобразим $\overline{0}^{\perp}$ $=[\overline{0}]\cup\{\overline{0}\}$:



Далее дорисуем элементы из $\mathbf{\Gamma}_2(\bar{0})$:



Таким образом, контур получен. Дорисуем недостающие рёбра:



Найдём массив пересечений графа.

Ясно, что $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\Gamma})=2$.

Легко видеть, что $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{\lambda}=2$ – постоянное число, так что граф является рёберно регулярным с параметрами (19, 6, 2). Также $\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\lambda}-1=6-2-1=3$, то есть $\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{b}_1=3$.

Если $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=2$, то $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ лежат в одной замкнутой окрестности. Тогда $\boldsymbol{y}$ для $\boldsymbol{x}$ имеется двух типов: диаметрально противоположен к $\boldsymbol{x}$, и иначе. В первом случае $\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=1$, во втором – $\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=2$. Так что $\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in\{1, 2\}$.

Таким образом, массив пересечений – следующий: $\{6, 3; 1, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\}$.

6. Нижеследующие примеры касаются случая $\boldsymbol{m}-1$ делится на 4.

Пусть $\boldsymbol{m}=5$. Рассмотрим сравнение $\boldsymbol{r}^4\equiv1(\mathrm{mod}\ 5)$, где $1<\boldsymbol{r}<5$, $(\boldsymbol{r}-1, 4)=1$. Подберём такое $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{r}=2 \Rightarrow \boldsymbol{r}^4=2^4=16\equiv1(\mathrm{mod}\ 5).$$

При этом $(\boldsymbol{r}-1, \boldsymbol{m})=(2-1, 5)=1$.

Таким образом, $\boldsymbol{r}=2$ и $\boldsymbol{K}=\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{\boldsymbol{r}}, -\bar{\boldsymbol{r}}\}=\{\bar{1}, \bar{4}, \bar{2}, \bar{3}\}$ (так же, как и выше, всюду ниже множество $\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{\boldsymbol{r}}, -\bar{\boldsymbol{r}}\}$ будем обозначать через $\boldsymbol{K}$). В нашем случае $\mathbf{Z}_5=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Так как $\bar{0}-\bar{\boldsymbol{y}}=-\bar{\boldsymbol{y}}\in\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ для всех $\bar{\boldsymbol{y}}\neq\bar{0}$, то все ненулевые элементы из $\mathbf{Z}_5$ лежат в $[\bar{0}]$.

Лемма 2. *Если* $4 \mid \boldsymbol{m}-1$, то *для любой вершины* $\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{Z}_{\boldsymbol{m}}$ *графа* $\boldsymbol{\Gamma}$ *имеет место равенство* $[\bar{\boldsymbol{x}}]=\{\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{1}, \bar{\boldsymbol{x}}-\bar{1}, \bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{r}}, \bar{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{r}}\}$. В частности, *для любой вершины графа* $\boldsymbol{\Gamma}$ *имеем* $\deg\bar{\boldsymbol{x}}=4$, то есть *граф* $\boldsymbol{\Gamma}$ *– регулярный степени* 4.

Доказательство провести самостоятельно (аналогично доказательству **Леммы 1**).

В нашем случае $\boldsymbol{m}=5$ имеем:

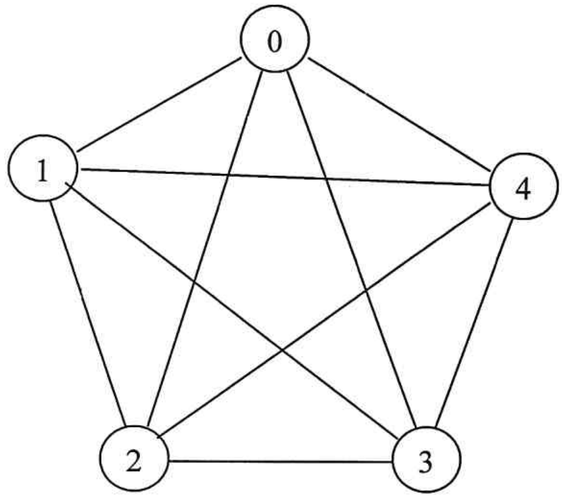
$$[\bar{0}]=\{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\},$$
$$[\bar{1}]=\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\},$$
$$[\bar{2}]=\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}\},$$

$$[\bar{3}]=\{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{4}\},$$

$$[\bar{4}]=\{\bar{0},\ \bar{1},\ \bar{2},\ \bar{3}\}.$$

Как видим, любая вершина графа $\mathbf{\Gamma}$ в своей окрестности содержит все остальные вершины графа. Другими словами, любая пара вершин графа связаны ребром. То есть $\mathbf{\Gamma}$ – полный граф: $\mathbf{\Gamma}=\boldsymbol{K}_5$. В частности, диаметр $\boldsymbol{d}$ графа равен 1, и массив пересечений – следующий: $\{4; 1\}$.

Граф можно изобразить следующим образом:



7. Пусть $\boldsymbol{m}$=9. Имеем

$$\boldsymbol{r}=2 \Rightarrow \boldsymbol{r}^4=2^4=16\not\equiv 1(\text{mod } 9),$$

$$\boldsymbol{r}=3 \Rightarrow \boldsymbol{r}^4=3^4=81\not\equiv 1(\text{mod } 9),$$

$$\boldsymbol{r}=4 \Rightarrow \boldsymbol{r}^4=4^4=256\not\equiv 1(\text{mod } 9),$$

$$\boldsymbol{r}=5 \Rightarrow \boldsymbol{r}^4=5^4=625\not\equiv 1(\text{mod } 9),$$

$$\boldsymbol{r}=6 \Rightarrow \boldsymbol{r}^4=6^4=1296\not\equiv 1(\text{mod } 9),$$

$$\boldsymbol{r}=7 \Rightarrow \boldsymbol{r}^4=7^4=2401\not\equiv 1(\text{mod } 9),$$

$$\boldsymbol{r}=8 \Rightarrow \boldsymbol{r}^4=8^4=4096\equiv 1(\text{mod} 13).$$

При этом $(\boldsymbol{r}-1, \boldsymbol{m})=(8-1, 9)=1$.

Таким образом, $\boldsymbol{r}=8$, $\boldsymbol{K}=\{\bar{1},\ -\bar{1},\ \bar{\boldsymbol{r}},\ -\bar{\boldsymbol{r}}\}=\{\bar{1},\ \bar{8},\ \bar{8},\ \bar{1}\}=\{\bar{1},\ \bar{8}\}$. Как видим, $\boldsymbol{K}$ не удовлетворяет условию $|\boldsymbol{K}|=4$ (классы вычетов $\bar{1}$ и $-\bar{\boldsymbol{r}}$, а также $-\bar{1}$ и $\bar{\boldsymbol{r}}$ по mod 9 совпадают).

8. Пусть $\boldsymbol{m}$=13. Имеем

$$r=2 \Rightarrow r^4=2^4=16\not\equiv 1(\text{mod } 13),$$

$$r=3 \Rightarrow r^4=3^4=81\not\equiv 1(\text{mod } 13),$$

$$r=4 \Rightarrow r^4=4^4=256\not\equiv 1(\text{mod } 13),$$

$$r=5 \Rightarrow r^4=5^4=625\equiv 1(\text{mod } 13).$$

При этом $(\boldsymbol{r}-1, \boldsymbol{m})=(5-1, 13)=1$.

Таким образом, $\boldsymbol{r}=5$, $\boldsymbol{K}=\{\bar{1}, -\bar{1}, \bar{r}, -\bar{r}\}=\{\bar{1}, \overline{12}, \bar{5}, \bar{8}\}$.

Выпишем окрестность произвольной вершины $\bar{x}$ (**Лемма 2**):

$$[\bar{x}]=\{\bar{x}+\bar{1},\ \bar{x}+\bar{5},\ \bar{x}+\bar{8},\ \bar{x}+\overline{12}\}.$$

Поэлементно (так же, как и выше, опускаем чёрточки над обозначениями классов):

[0]={1, 5, 8, 12},

[1]={2, 6, 9, 0}={0, 2, 6, 9},

[2]={1, 3, 7, 10},

[3]={2, 4, 8, 11},

[4]={3, 5, 9, 12},

[5]={4, 6, 10, 0}={0, 4, 6, 10},

[6]={1, 5, 7, 11},

[7]={2, 6, 8, 12},

[8]={3, 7, 9, 0}={0, 3, 7, 9},

[9]={1, 4, 8, 10},

[10]={2, 5, 9, 11},

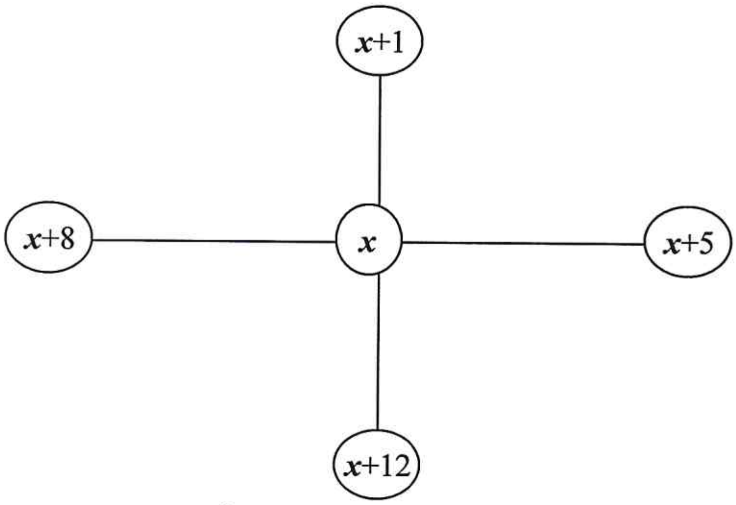
[11]={3, 6, 10, 12},

[12]={4, 7, 11, 0}={0, 4, 7, 11}.

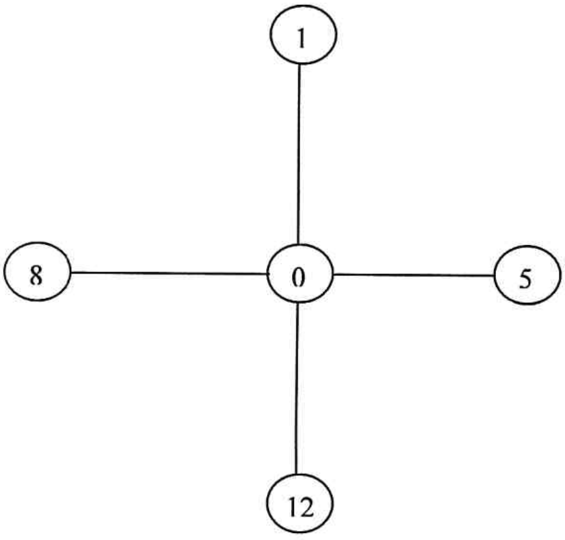
Покажем, что вершины в окрестности произвольной вершины $\bar{x}$ не смежны. Как обычно, составим таблицу вычитания $\bar{u}-\bar{v}$ элементов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ из $[\bar{x}]$:

$\overline{u}$ \ v	$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{x}+\overline{5}$	$\overline{x}+\overline{8}$	$\overline{x}+\overline{12}$
$\overline{x}+\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$
$\overline{x}+\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{6}$
$\overline{x}+\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$
$\overline{x}+\overline{12}$	$\overline{11}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$

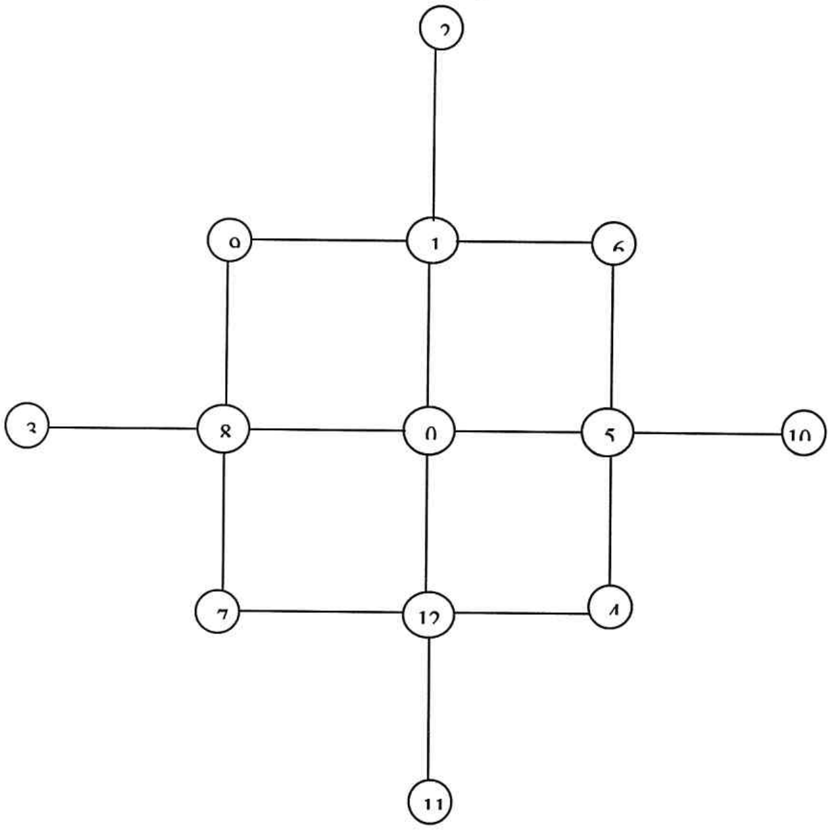
В таблице серым цветом не выделено ни одного значения $\overline{u}-\overline{v}$. Это означает, что для любых $\overline{u}$ и $\overline{v}$ из $[\overline{x}]$ имеем $\overline{u}-\overline{v}\notin \boldsymbol{K}$, и никакие две вершины из $[\overline{x}]$ не соединены ребром. Таким образом, замкнутая окрестность $\overline{x}^{\perp}=[\overline{x}]\cup\{\overline{x}\}$ произвольной вершины представляет собой своеобразный крест (то есть окрестность $[\overline{x}]$ вершины $\overline{x}$ – коклика из 4 вершин:



Для изображения графа сначала изобразим замкнутую окрестность $\overline{0}^{\perp}=[\overline{0}]\cup\{\overline{0}\}$ точки $\overline{0}$.

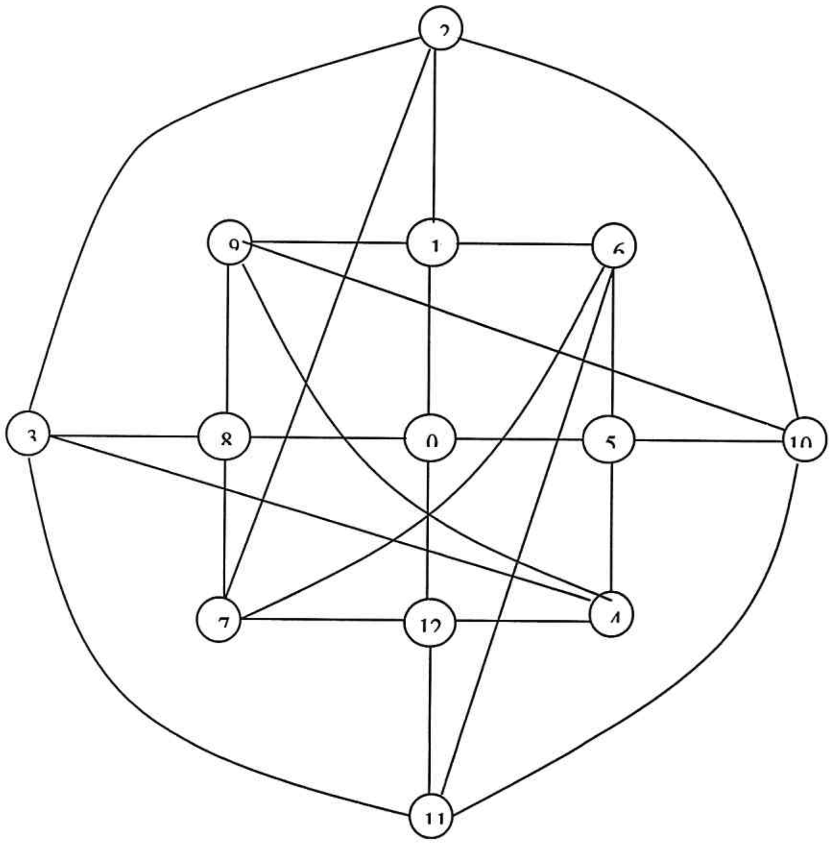


Добавим теперь вершины, лежащие на расстоянии 2 от $\overline{0}$:

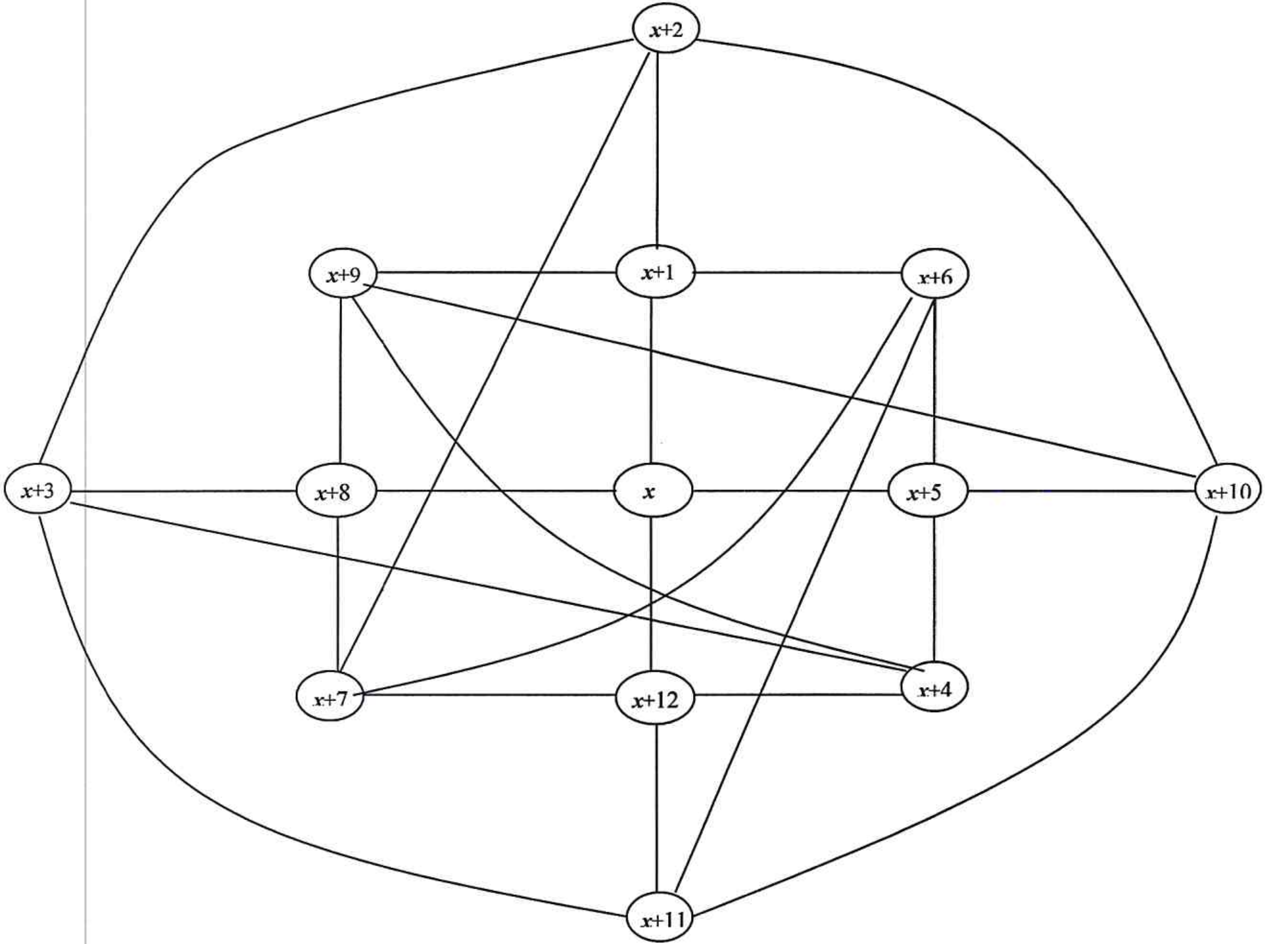


Получили контур графа относительно $\overline{0}$.

Дорисуем недостающие рёбра:



Найдём массив пересечений графа. Ясно, что граф выглядит одинаково независимо от того, относительно какой вершины изображён контур:



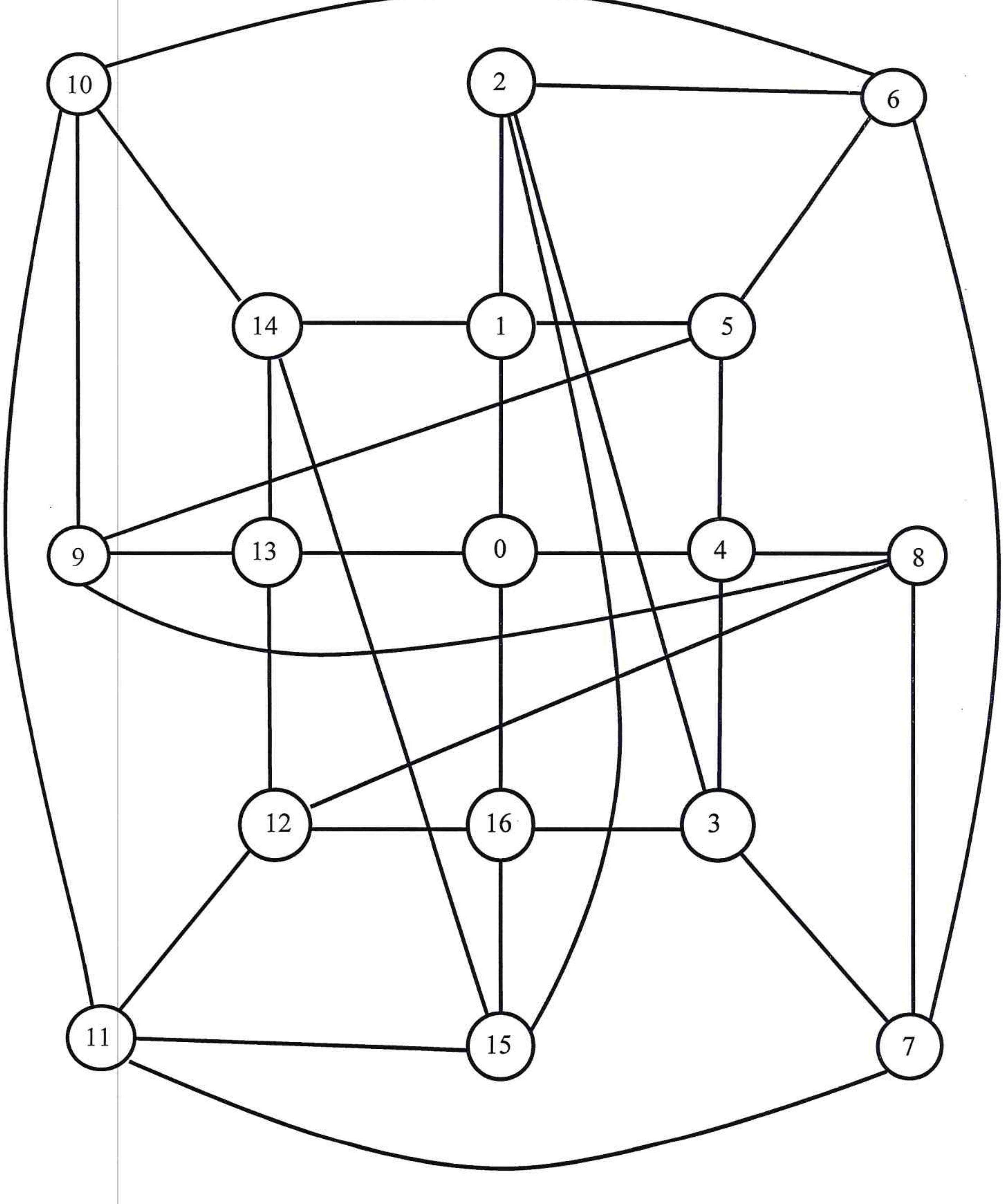
Теперь ясно, что диаметр $\boldsymbol{d}$ графа $\boldsymbol{\Gamma}$ равен 2: $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\Gamma})=2$.

Если $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=1$, то $\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{\lambda}=0$ – постоянное (не зависит от выбора элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ на расстоянии 1 друг от друга), и граф является рёберно регулярным с параметрами (13, 4, 0). Также $\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{\lambda}-1=4-0-1=3$, то есть $\boldsymbol{b}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{b}_1=3$.

Если $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=2$, то $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ лежат в одной замкнутой окрестности. Тогда $\boldsymbol{y}$ для $\boldsymbol{x}$ имеется двух типов: первый – такие, что $\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=|\boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{x})\cap\boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{y})|=1$ ($\boldsymbol{y}\in\{\boldsymbol{x}+2, \boldsymbol{x}+3, \boldsymbol{x}+10, \boldsymbol{x}+11\}$), и второй – такие, что $\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=1$ ($\boldsymbol{y}\in\{\boldsymbol{x}+4, \boldsymbol{x}+6, \boldsymbol{x}+7, \boldsymbol{x}+9\}$). Так что $\boldsymbol{c}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\in\{1, 2\}$.

Таким образом, массив пересечений – следующий: $\{4, 3; 1, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\}$.

9. Перед заключением мы кратко рассмотрим случай m=17. Опуская подробности лишь отметим, что граф имеет следующее изображение (убедиться в этом проделав необходимые вычисления!):



Вычислим параметры пересечений графа.

Если $d(x, y)=1$, то $a_1(x, y)=a_1=\lambda=0$ – постоянное (не зависит от выбора элементов x и y на расстоянии 1 друг от друга), и граф является рёберно регулярным с параметрами (17, 4, 0). Также $b_1(x, y)=k-\lambda-1=4-0-1=3$, то есть $b_1(x, y)=b_1=3$.

Пусть теперь $d(x, y)=2$. Без ограничения общности пусть $x=0$. Тогда для 0 элементов y таких, что $d(x, y)=2$, имеются двух видов. Первые: $y\in\{2, 8, 9, 15\}$. Вторые: $y\in\{3, 5, 12, 14\}$.

Если элемент y – элемент первого вида, скажем, $y=2$, то

$A_2(0, 2)=\Gamma_2(0)\cap\Gamma(2)=\{3, 15\}$, $\quad a_2(0, 2)=2$,

$B_2(0, 2)=\Gamma_3(0)\cap\Gamma(2)=\{6\}$, $\quad b_2(0, 2)=1$,

$C_2(0, 2)=\Gamma_2(0)\cap\Gamma(2)=\{1\}$, $\quad c_2(0, 2)=1$.

Аналогично,

$$a_2(0, 8)=a_2(0, 15)=a_2(0, 9)=2,$$
$$b_2(0, 8)=b_2(0, 15)=b_2(0, 9)=1,$$
$$c_2(0, 8)=c_2(0, 15)=c_2(0, 9)=1$$

(показать!).

Если элемент y – элемент второго вида, скажем, $y=5$, то

$A_2(0, 5)=\Gamma_2(0)\cap\Gamma(5)=\{9\}$, $\quad a_2(0, 5)=1$,

$B_2(0, 5)=\Gamma_3(0)\cap\Gamma(5)=\{6\}$, $\quad b_2(0, 5)=1$,

$C_2(0, 5)=\Gamma_2(0)\cap\Gamma(5)=\{1, 4\}$, $\quad c_2(0, 5)=1$.

Аналогично,

$$a_2(0, 3)=a_2(0, 12)=a_2(0, 14)=1,$$
$$b_2(0, 3)=b_2(0, 12)=b_2(0, 14)=1,$$
$$c_2(0, 3)=c_2(0, 12)=c_2(0, 14)=2.$$

(показать!).

Таким образом, $a_2(x, y)\in\{2, 1\}$, $b_2(x, y)\in\{1, 2\}$, $c_2(x, y)=1$.

Пусть $d(x, y)=3$. Снова полагаем $x=0$. Тогда $\Gamma_3(0)=\{6, 7, 10, 11\}$. Как и выше:

$A_3(0, 6)=\Gamma_3(0)\cap\Gamma(6)=\{7, 10\}$, $\quad a_3(0, 6)=2$,

$B_3(0, 6)=\Gamma_4(0)\cap\Gamma(6)=\varnothing$, (так как $d(\Gamma)=3$), и $b_3=0$,

$\boldsymbol{C}_3(0, 6)=\boldsymbol{\Gamma}_2(0)\cap\boldsymbol{\Gamma}(6)=\{2, 5\}$ и $\boldsymbol{c}_3(0, 6)=2$.

И вообще можно показать, что $\boldsymbol{a}_3=2$ и $\boldsymbol{c}_3=2$ (показать!). Таким образом, массив пересечений графа – следующий: $\{4, 3, 2; 1, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, 2\}$.

Наконец, в заключение отметим, что основная часть курсовой работы должна состоять из трёх глав. Первая глава – примеры решения задач, которые приведены в данном приложении, с устранением пробелов, к которым в скобках мы обратились с замечаниями типа «проделать самостоятельно!». Кроме того, эта глава должна содержать решение задачи для $\boldsymbol{m}=19$.

Во второй и третьей главах должны быть рассмотрены свои варианты пар $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{k})$.

Приложение 2. Некоторые понятия из теории графов

1. Граф: основные понятия и обозначения. Подграф графа. Граф без кратных рёбер – это пара $\mathbf{\Gamma}=(V, R)$, состоящая из множества V, называемого ***множеством вершин*** $\mathbf{\Gamma}$, и множества $R\subseteq V\times V$ – бинарного отношения на множестве вершин V, называемого ***множеством дуг*** $\mathbf{\Gamma}$. Элементы соответственно V и R называются ***вершинами*** и ***дугами***. Если отношение R симметрично, то граф называется ***неориентированным***, элементы из R – ***рёбрами***. Если отношение R несимметрично, то граф называется ***ориентированным***.

Если граф $\mathbf{\Gamma}=(V, R)$ – неориентированный, то, возможно, существует дуга $(a, b)\in R$, такая, что $(b, a)\in R$. Тогда $\{a, b\}=\{(a, b), (b, a)\}$ называется ***ребром***, вершины a и b называются смежными, или соседями. Также применяется обозначение $a\sim b$.

Если $(a, a)\in R$, то (a, a) называется ***петлёй***. В зависимости от того, какими свойствами обладает граф, к названию будем присоединять соответствующее прилагательное. Например, неориентированный граф, без петель и кратных рёбер – это граф, который является неориентированным, в котором нет кратных рёбер и петель. Именно такие графы мы и будем рассматривать ниже, если иное особо не оговорено.

Два графа (V, R) и (W, S) ***изоморфны***, если существует биекция $f{:}V\to W$ такая, что $f[R]=S$. Попросту говоря, два графа изоморфны, если их строение одинаково. Изоморфные графы не различаются.

Пусть $\mathbf{\Gamma}=(V, R)$ – граф, и пусть X – подмножество из V. ***Подграфом*** $\mathbf{\Gamma}$, ***индуцированным на*** X, является граф с множеством вершин X, рёбра которого являются рёбрами $\mathbf{\Gamma}$, содержащиеся в X.

2. Окрестность, расстояние в графе. Связность графа. Диаметр. Мы пишем $x\in\mathbf{\Gamma}$, если x является вершиной $\mathbf{\Gamma}$. Мощность $|\mathbf{\Gamma}|$ множества вершин $\mathbf{\Gamma}$ обозначается через $v(\mathbf{\Gamma})$ или просто через v. ***Путь длины*** i, ***соединяющий*** две вершины $x, y\in\mathbf{\Gamma}$ – это последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_i$ вершин, такая, что $x=x_0\sim x_1\sim\ldots\sim x_i=y$. Существование соединения путём между вершинами является отношением эквиваленции. Эти классы эквиваленции называются (***связными***) ***компонентами*** $\mathbf{\Gamma}$. Граф называется

связным, если он содержит одну компоненту связности. Ориентированный граф называется ***сильно связным***, если для любых двух вершин $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ существует последовательность вершин $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{y}$ такая, что $(\boldsymbol{x}_{j-1}, \boldsymbol{x}_j)\in \boldsymbol{R}$ для $\boldsymbol{j}=1, \ldots, \boldsymbol{i}$. ***Расстояние*** $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ между двумя вершинами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ – это длина кратчайшего пути (***геодезической***) от $\boldsymbol{x}$ к $\boldsymbol{y}$ в $\boldsymbol{\Gamma}$. Если такого пути не существует, то расстояние полагается равным ∞. ***Диаметр*** $\boldsymbol{\Gamma}$, обозначаемый через $\boldsymbol{d}$ (или $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{\Gamma})$), – это максимальное расстояние, встречающееся в $\boldsymbol{\Gamma}$. ***Обхват*** $\boldsymbol{\Gamma}$, обозначаемый через $\boldsymbol{g}$, – это длина кратчайшего цикла (подграфа валентности 2) в $\boldsymbol{\Gamma}$. 1-***фактор*** $\boldsymbol{\Gamma}$ – разбиение множества вершин $\boldsymbol{\Gamma}$ на рёбра. μ-граф в $\boldsymbol{\Gamma}$ – это подграф, индуцированный множеством общих соседей двух вершин с расстоянием 2.

Для данного $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{\Gamma}$ через $\boldsymbol{\Gamma}_i(\boldsymbol{x})$ обозначаем множество вершин $\boldsymbol{y}$ с $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\boldsymbol{i}$, а через $\boldsymbol{\Gamma}_{\leq i}(\boldsymbol{x})$ – множество вершин $\boldsymbol{y}$ с $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\leq \boldsymbol{i}$. В частности, $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\Gamma}_1(\boldsymbol{x})$ обозначает множество соседей $\boldsymbol{x}$. Это множество также обозначается через $[\boldsymbol{x}]$. $\boldsymbol{\Gamma}_i(\boldsymbol{x})$ называется ***i-окрестностью*** графа $\boldsymbol{\Gamma}$.

Валентность или ***степень*** $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x})$ вершины $\boldsymbol{x}$ – это мощность $\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x})$. Граф называется ***регулярным*** (***валентности k***), если каждая вершина имеет одинаковую валентность $\boldsymbol{k}$.

3. Некоторые виды графов. Граф называется ***полным*** (или ***кликой***), если любые две его вершины смежны. Полный граф с $\boldsymbol{n}$ вершинами обозначается через $\boldsymbol{K}_n$. ***Коклика*** – это граф, в котором нет двух смежных вершин. ***Многоугольник*** – это связный граф валентности 2.

Граф называется ***двудольным*** (с ***частями*** или ***классами M***, $\boldsymbol{N}$), если его множество вершин можно разбить на две коклики ($\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$). Обозначим через $\boldsymbol{K}_{m,n}$ полный двудольный граф с частями $\boldsymbol{m}$-множества $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{n}$-множества $\boldsymbol{N}$, где каждая вершина из $\boldsymbol{M}$ смежна с каждой вершиной из $\boldsymbol{N}$. Граф является ***полным объединением*** графов $\boldsymbol{\Gamma}^1, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}^t$, и обозначается через $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{\Gamma}^1\oplus\ldots\oplus\boldsymbol{\Gamma}^t$, если $\boldsymbol{\Gamma}^1, \ldots, \boldsymbol{\Gamma}^t$ являются подграфами $\boldsymbol{\Gamma}$, такими, что множества вершин $\boldsymbol{\Gamma}^i$ есть разбиение множества вершин $\boldsymbol{\Gamma}$, а рёбра $\boldsymbol{\Gamma}$ являются в точности рёбрами $\boldsymbol{\Gamma}^i$ и рёбрами вида $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\}$ с $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ из различных $\boldsymbol{\Gamma}^i$. ***Полное расчленение графа*** $K_{m_1, m_2, \ldots, m_t}$ – это полное объединение коклик порядков $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_t$;

полное объединение t коклик порядков m будем обозначать через $K_{t\times m}$. (Таким образом, $K_{2\times m}$ является как раз $K_{m,m}$). Двудольный граф с частями M, N называется ***полурегулярным***, если существуют постоянные m, n такие, что каждая вершина из M имеет валентность m, а каждая вершина из N имеет валентность n.

4. Параметры пересечений и массив пересечений графа.

Для $x, y\in\Gamma$ расстояние между которыми равно i, обозначим

$$A_i(x, y)=\Gamma_i(x)\cap\Gamma(y),\ B_i(x, y)=\Gamma_{i+1}(x)\cap\Gamma(y),\ C_i(x, y)=\Gamma_{i-1}(x)\cap\Gamma(y).$$

$$a_i(x, y)=|\Gamma_i(x)\cap\Gamma(y)|,\ b_i(x, y)=|\Gamma_{i+1}(x)\cap\Gamma(y)|,\ c_i(x, y)=|\Gamma_{i-1}(x)\cap\Gamma(y)|.$$

Так, для графа изображённого на рисунке ниже, имеем $d(1, 2)=1$, $d(1, 5)=2$, и

$A_1(1, 2)=\Gamma_1(1)\cap\Gamma(2)=\{3, 4\}$, $a_1(1, 2)=|\Gamma_1(1)\cap\Gamma(2)|=2$,

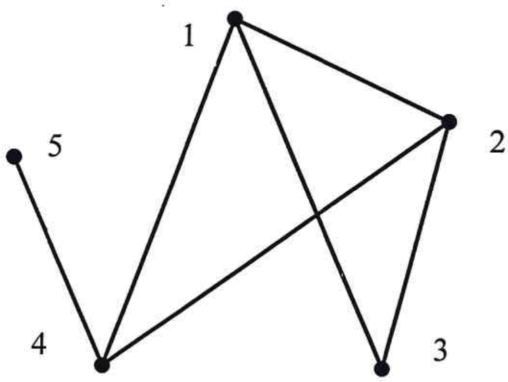
$B_1(1, 2)=\Gamma_2(1)\cap\Gamma(2)=\varnothing$, $b_1(1, 2)=|\Gamma_2(1)\cap\Gamma(2)|=0$,

$C_1(1, 2)=\Gamma_0(1)\cap\Gamma(2)=\{1\}$, $c_1(1, 2)=|\Gamma_0(1)\cap\Gamma(2)|=1$,

$A_2(1, 5)=\Gamma_2(1)\cap\Gamma(5)=\varnothing$, $a_2(1, 5)=|\Gamma_2(1)\cap\Gamma(5)|=0$,

$B_2(1, 5)=\Gamma_3(1)\cap\Gamma(5)=\varnothing$, $b_2(1, 5)=|\Gamma_3(1)\cap\Gamma(5)|=0$,

$C_2(1, 5)=\Gamma_1(1)\cap\Gamma(5)=\{4\}$, $c_2(1, 5)=|\Gamma_0(1)\cap\Gamma(5)|=1$,



Положим $k(x)=k_1(x)$, $\lambda(x, y)=a_1(x, y)$, если $x\sim y$, и $\mu(x, y)=c_2(x, y)$, если $d(x, y)=2$. В случае, когда $k(x)$ не зависит от выбора вершины $x\in\Gamma$ (то есть, когда Γ регулярен), будем писать $k=k(\Gamma)=k(x)$, и аналогично для других параметров.

Можно показать, что если Γ – регулярный валентности k, то $k=a_i(x, y)+ +b_i(x, y)+c_i(x, y)$, $k=b_0(x, y)$, $c_1=1$.

$$\{b_0(x, y), b_1(x, y), \ldots, b_d(x, y); c_1(x, y), c_2(x, y), \ldots, c_d(x, y)\} -$$

массив пересечений регулярного графа Γ.

Если различных значений $b_i(x, y)$ и $c_i(x, y)$ относительно немного (в пределах 2 или 3), то эти значения можно указать в виде векторов (упорядоченных наборов). Причём координаты в $b_i(x, y)$ и $c_i(x, y)$ соответствуют друг другу. Например, {9, 4, (2, 3, 4); 1, (6, 5, 4), 6} означает, что Γ – регулярный граф степени 9, у которого b_1=4, c_1=1, $b_2(x, y)\in\{2, 3, 4\}$, $c_2(x, y)\in\{6, 5, 4\}$, и если $b_2(x, y)$=2, то $c_2(x, y)$=6 и, обратно (если $c_2(x, y)$=6, то $b_2(x, y)$=2), если $b_2(x, y)$=3, то $c_2(x, y)$=6, и если $b_2(x, y)$=4, то $c_2(x, y)$=4. Во всех случаях $a_1(x, y)$=1 (так как $a_1(x, y)+b_1(x, y)+c_1(x, y)=9$). Если различных значений $b_i(x, y)$ и $c_i(x, y)$ всего два, то эти значения можно указать вообще в виде столбцов: $\{9, 4, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}; 1, \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}, 6\}$.

Граф Γ называется ***дистанционно регулярным***, если $a_i(x, y)=a_i$, $b_i(x, y)=b_i$ и $c_i(x, y)=c_i$ не зависят от выбора вершин $x, y\in\Gamma$ на расстоянии i друг от друга. Таким образом, массив пересечений дистанционно регулярного графа: $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; 1, c_2, \ldots, c_d\}$.

Дистанционно регулярный граф диаметра 2 называется ***сильно регулярным***. Таким образом, сильно регулярный граф – это граф регулярный степени k, у которого окрестности двух соседних вершин имеют λ соседей вершин, а окрестности двух несоседних вершин имеют μ общих соседей. $\{b_0, b_1; 1, \mu\}$ – массив пересечений сильно регулярного графа. Ещё говорят о сильно регулярном графе с параметрами (v, k, λ, μ), v – число вершин графа.

Более подробную информацию о сильно регулярных и дистанционно регулярных графах можно почерпнуть из [3] и [4].

Приложение 3. Титульный лист

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Лысьвенский филиал

Кафедра ЕН

Курсовая работа

По дисциплине **«Дискретная математика и теория автоматов»**

на тему «**О регулярных графах степени *k***

на множестве классов вычетов по модулю числа *m*,

$(m, k) \in \{(17, 4), (19, 6), (97, 4), (25, 6)\}$»

Студента XXX курса

Группы XXX

Иванова И.И.

Оценка:

Руководитель

Мухаметьянов И.Т.

Лысьва. 2017 г

Приложение 4. Задание на курсовую работу

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Пермский национальный исследовательский политехнический университет
Лысьвенский филиал
Кафедра Естественно научных дисциплин

Задание на выполнение курсовой работы
по дисциплине «**Дискретная математика и теория автоматов**»

Студент группы № ЭВТ-16-1бЛФ
Фамилия ______ **Иванова** ______ Имя__**Ирина**___Отчество ____**Игоревна**_____
Тема курсовой работы: **О регулярных графах степени *k***
на множестве классов вычетов по модулю числа *m*,
$(m, k) \in \{(17, 4), (19, 6), (97, 4), (25, 6)\}$
Тема утверждена распоряжением по кафедре № _________ от «___» ______ 20__г.
Дата сдачи на проверку до 15.05.2017 г.
Дата защиты курсовой работы до 30.05.2017 г.
График выполнения работы

№	Наименование этапа	% выполнения		дата контроля	
		план	факт	план	факт
1.	Осмысливание задачи, теоретического материала, примеров	10		15.03	
2.	Написание вводной и теоретической части, выполнение заданий для одной из поставленных задач	30		30.03	
3.	Выполнение заданий для второй из поставленных задач	30		20.04	
4.	Оформление отчета по выполнению курсовой работы.	25		15.05	
5.	Защита курсовой работы	5		30.05	

Руководитель

_________________________ И.Т.Мухаметьянов

зав. кафедрой

_________________________ И.Т.Мухаметьянов

Задание принял к исполнению ______________ ______________________
(Ф.И.О. студента)

Дата выдачи задания _____________

Литература.

1. Мухаметьянов И.Т. Методические материалы к изучению курса «Дискретная математика» Раздел «Алгебраические структуры и введение в теорию групп».
2. Мухаметьянов И.Т. Методические материалы к изучению курса «Дискретная математика» Раздел «Элементы теории графов».
3. Brouwer A.E., Cohen A.M., Neumaier A. Distance-regular graphs. Berlin: Springer-Verlag. 1989. 485 p.
4. Cameron P.J., van Lint J.H. Designs, Graphs, Codes and their Links. Cambridge University Press. 1991. 240 p.